Termodynamika i Fizyka Statystyczna R - seria treningowa

1. Na ćwiczeniach rozważany był model ciała doskonale czarnego w postaci wnęki utrzymywanej w temperaturze T, która wypełniona jest promieniowaniem. Wyobraźmy sobie, że w ściance tej wnęki zrobiono otwór o powierzchni A, przez który promieniowanie może wydostawać się na zewnątrz. Pokaż, że widmowa gęstość energii wypromieniowana przez otwór w czasie dt do kąta bryłowego $d\Omega$ jest dana przez

$$e'_\omega = \frac{A\cos\theta}{4\pi}\ e_\omega c\ \mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega$$

gdzie e_ω jest dane przez rozkład Plancka

$$e_\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}$$

zaś θ jest kątem między kierunkiem, w jakim rozchodzi się promieniowanie a kierunkiem normalnym do powierzchni otworu. Następnie, korzystając z tego wyniku pokaż, że całkowita moc promieniowania wydobywającego się przez jednostkową powierzchnię wynosi $\sigma_S T^4$, gdzie $\sigma_S = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3c^2}$ jest stałą Stefana.

2. Dla fal spinowych (magnonów) w ferromagnetyku częstość związana jest z wektorem falowym wzorem $\omega = Ak^2,\ k < k_0$, gdzie A jest stałą. Zakładając (analogicznie do modelu Debye'a), że fale z $k > k_0$ nie rozchodzą się w tym układzie wykazać, że w niskich temperaturach magnony dają do ciepła właściwego wkład proporcjonalny do $T^{3/2}$.

3. Znajdź ściśliwośc adiabatyczną $\chi_S = -\frac{1}{A}\left(\frac{\partial A}{\partial p}\right)_S$ dwuwymiarowego gazu fotonów wypełniającego powierzchnię A temperaturze T.

4. Znajdź pojemność cieplną zdegenerowanego ultrarelatywistycznego (E = c|p|) gazu elektronów dla $T \ll T_F$. Wskazówka: użyj rozwinięcia Sommerfelda. Odpowiedź wyraź przez $< N >$, V i T.

5. Energię elektronu w zewnętrznym polu magnetycznym możemy przybliżyć jako sumę energii kinetycznej i składnika $\mp\mu_B B$, przy czym górny znak odpowiada orientacji spinu zgodnej z polem $\vec{B}$, a dolny - przeciwnej do pola, zaś μ_B jest magnetonem Bohra. Rozważmy **dwuwymiarowy** gaz elektronów na płaskiej powierzchni przedzielonej ścianką na dwa obszary A_1 i A_2. Obszar A_1 znajduje się w polu magnetycznym B, a w obszarze A_2 pola nie ma. Wiadomo też, że w obu obszarach są jednakowe koncentracje elektronów (liczby elektronów na jednostkę powierzchni) oraz że oba obszary znajdują się początkowo w temperaturze $T = 0$. W pewnej chwili odsunięto przegrodę. Czy nastąpi przepływ cząstek między obszarami A_1 i A_2, a jeśli tak, to w którą stronę? Odpowiedź uzasadnij. Wskazówka: wyraź koncentracje cząstek po obu stronach przegrody przez ich potencjały chemiczne. Pamietaj, że gaz jest dwuwymiarowy i że $T = 0$!

6. Rozważmy dwuwymiarowy gaz doskonały złożony z nierelatywistycznych fermionów o spinie 1/2 i masie m.

   (a) Znaleźć zależność pomiędzy koncentracją $n = N/A$, aktywnością $z = e^{\frac{\mu}{kT}}$, i temperaturą T. Wygodnie jest wprowadzić termiczną długość de Broglie'a $\lambda_T = \sqrt{2\pi\hbar^2/mkT}$.

   (b) Dwuwymiarowy obszar A jest początkowo wypełniony nierelatywistycznymi fermionami o masie m, spinie 1/2 i średniej koncentracji n w temperaturze T. Fermiony nie oddziałują między sobą, ale dwa fermiony o przeciwnym spinie mogą łączyć się w pary, tworząc bozony o spinie 0, masie $2m$ i energii wiązania Δ. Innymi słowy, relacja dyspersyjna (pomiędzy energią a wektorem falowym) dla fermionów dana jest przez $e_f(\mathbf{k}) = \hbar^2 k^2/2m$ a dla bozonów $e_b(\mathbf{k}) = \hbar^2 k^2/4m - \Delta$.

   Po upływie pewnego czasu reakcja $f_\uparrow + f_\downarrow \to b$ osiągnęła stan równowagi, scharakteryzowany przez równowagowe koncentracje fermionów i bozonów n_f i n_b oraz temepraturę T. Korzystając z tego, że całkowita gęstość masy układu jest zachowana, znajdź zależność pomiędzy równowagowymi koncentracjami n_f, n_b a koncentracją początkową n. Na tej podstawie znajdź następnie związek między początkowym n a temperaturą (T) i aktywnością fermionów (z_f) w końcowym stanie równowagi.

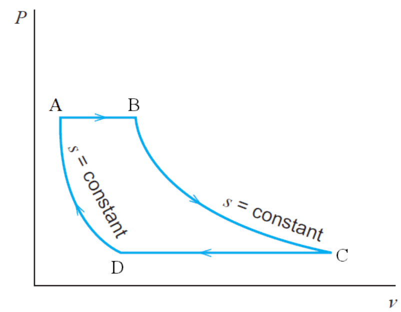
   (c) Rozpatrując stan równowagi opisany w punkcie (b) rozważ granicę $n\lambda_T^2 \gg 1$ przy stałej temperaturze. Jaką wartość w tej granicy przyjmuje potencjał chemiczny fermionów (z_f) w stanie równowagi z bozonami? Co to oznacza dla średniej koncentracji bozonów (n_b) i fermionów (n_f)?

7. Rozważ układ, w którym $E(S,V,N) = aS^4/NV^2$, gdzie $a > 0$.

   (a) Znajdź równanie stanu $p = p(T,V,N)$

   (b) Znajdź równanie stanu $\mu = \mu(T,p)$.

   (c) N cząstek tej substancji podlega cyklowi Joule'a-Braytona

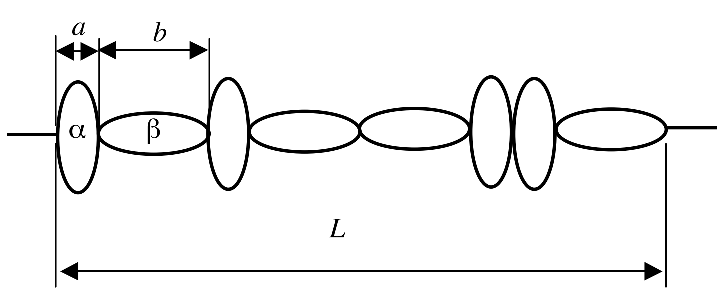
   

   Górna izobara odpowiada $p = p_2$ and i ma zakres od V_A do V_B. Dolna izobara odpowiada $p = p_1$. Znajdź objętości V_C i V_D.

   (d) Znajdź pracę wykonywaną przez układ w czasie cyklu W_cyc, pobrane ciepło Q_AB, oraz sprawność tego silnika. Wskazówka: wygodnie jest pracować w zmiennych (p,V).

8. Biorąc pod uwagę, że gaz fotonów w danej temperaturze T zachowuje się jak gaz bozonów z zerowym potencjalem chemicznym i odpowiednią gęstością stanów $g(\omega)$, pokaż, że entropia pojedynczego fotonu jest niezależna od temperatury. Intepretując entropię w języku teorii informacji, określ ile bitów niesie ze sobą pojedynczy foton. Pożyteczna równość: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx 1.202$.

9. Prostym modelem keratyny (istotnego składnika naszych włosów i skóry) jest jednowymiarowy łańcuch składający się z N cząstek, każda z których może istnieć w dwu konfiguracjach α i β o energiach E_α i E_β i długościach odpowiednio a i b (patrz rysunek). Parametry te spełniają nierówności $E_\alpha < E_\beta$ oraz $a < b$. Układ znajduje się w kontakcie z termostatem o temperaturze T. Korzystając z **rozkładu kanonicznego**

   (a) Znajdź sumę statystyczną dla tego układu

   (b) Znajdź średnią długość łańcucha jako funkcję temperatury, <L>(T). Przeanalizuj granicę wysokich temperatur $k_B T \gg E_\beta$. Czy wynik ten można było przewidzieć?

   (c) Wyobraźmy sobie teraz, że łańcuch ten rozciągamy przykładając do niego siłę F. Jaka będzie średnia długość łańcucha, <L>(T,F), w tym przypadku? Wskazówka: obecność siły zewnętrznej można uwzględnić przez dodanie członu $-FL$ do całkowitej energii łańcucha.

   (d) Znajdź podatność

   $$\chi = \left(\frac{\partial < L >}{\partial F} \right)_{F=0}$$

   i pokaż, że jest dodatnia. Czy jej dodatniość wynika też z jakichś głębszych przesłanek? Wskazówka: Przy liczeniu podatności może być wygodnie rozwinąc najpierw $< L >$ w małym F.

10. Rozważ gaz bozonów o masach m i spinie $s = 0$ zamknięty w objętości V. Załóżmy, że energia pojedynczej cząstki dana jest przez

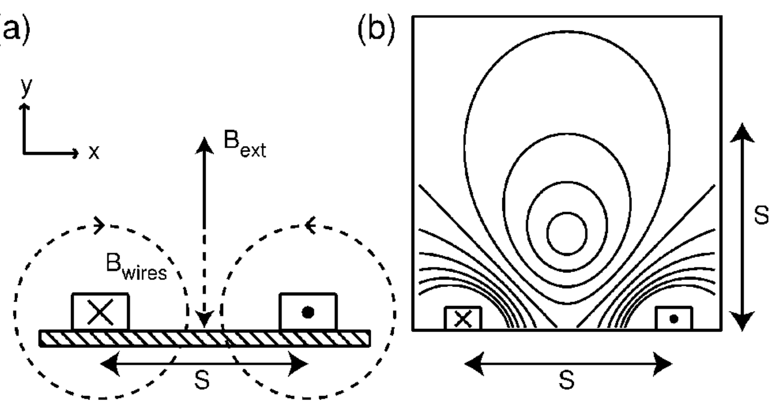
$$E = \frac{p^2}{2m} + n\Delta$$

gdzie $\Delta > 0$ jest pewną stałą dodatnią a n jest liczbą całkowitą równą 0 bądź 1. Wyznacz formułę na temperaturę krytyczną T_c takiego gazu, przy której następuje kondensacja. Następnie rozważ granicę $\Delta \gg kT$ - czy w tej granicy T_c jest większe czy mniejsze od temperatury krytycznej w przypadku gdy $E = \frac{p^2}{2m}$?

11. Pokazany na rysunku układ został zaproponowany przez N. H. Dekkera i in, ("Guiding neutral atoms on a chip", Phys. Rev. Lett. 84, 1124–1127 2000) jako efektywny sposób kontrolowania obojętnych elektrycznie atomów za pomocą pola magnetycznego wytwarzanego przez dwa druty wbudowane w mikropłytkę. Rysunek pokazuje linie stałego potencjału w tym układzie na płaszczyźnie xy, przy czym $x = 0$ wyznacza oś symetrii układu (punkty w równych odległościach od obu drutów) a $y = 0$ to płaszczyzna płytki.

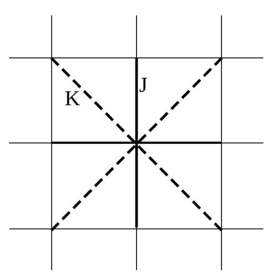
    Załóżmy że w układzie tym znajduje się N nierozróżnianych, nieoddziałujących atomów. Przybliżmy działający na nie potencjał przez $V(x, y, z) = \frac{\alpha}{2}x^2 + \frac{\beta}{2}(y - y_0)^2$ gdzie α i β to pewne stałe. Dodatkowo, układ ograniczony jest ściankami znajdującymi się w $z = \pm L/2$. Znajdź całkę statystyczną dla tego układu oraz entropię tego układu jako funkcje N, L i T, zakładając że układ pozostaje w stanie równowagi o temperaturze T.

    Następnie rozważ proces, w którym kwazistatycznie zmieniana jest wartość parametru β, a układ nie wymienia ciepła z otoczeniem (proces adiabatyczny). Znajdź końcową temperaturę układu T_f jako funkcję początkowej T_i oraz początkowej i końcowej wartości parametru β.



12. Rozważmy model Isinga ($S_i = \pm 1$) na sieci kwadratowej z oddziaływaniami o stąłych wymiany J i K pomiędzy najbliższymi sąsiadami i kolejnymi najbliższymi sąsiadami, jak na rysunku.

$$H = -J\sum_{\langle ij\rangle} S_i S_j - K\sum_{\{ij\}} S_i S_j - \mu_B B \sum_i S_i$$



gdzie pierwsza suma obejmuje wszystkie pary najbliższych sąsiadów, a druga suma obejmuje wszystkie pary kolejnych najbliższych sąsiadów.

a) Jaki jest stan podstawowy dla dużego pola $\mu_B B \gg |J|, |K|$?

b) Rozważmy przypadek $J > 0$ i $K > 0$. Jaki jest stan podstawowy przy braku pola ($B = 0$)? Znajdź energię stanu podstawowego.

c) Dla $J > 0$ i $K > 0$ wyznacz przybliżenie pola średniego dla tego hamiltonianu. Wyprowadź samozgodne równanie pola średniego.

d) Rozwiąż równanie pola średniego dla $B = 0$ i znajdź temperaturę krytyczną.

e) Oblicz wykładniki krytyczne β, γ i δ odpowiednio dla magnetyzacji, podatności i izotermy krytycznej.

f) Określ stan podstawowy dla przypadku $J < 0, K > 0$ i zerowego pola. Znaleźć energię stanu podstawowego.

g) Rozważ przejście fazowe, które zachodzi w funkcji J przy stałych $T = 0, B = 0, K > 0$. Czy jest to przejście ciągłe?

h) Omów jakościowo, co się dzieje dla $J > 0, K < 0$ lub $J < 0, K < 0$ (pole $B = 0$).

i) Naszkicuj diagram fazowy stanu podstawowego jako funkcję J i K.