

Termodynamika i Fizyka Statystyczna R

Zadania domowe - seria IV

1. **Mapa trójkątna** Rozważ mapę trójkątną

$$T(x) = \begin{cases} 2x & x < 1/2 \\ 2(1-x) & x \geq 1/2 \end{cases}$$

na odcinku $[0, 1]$. Niech $\rho(x)$ będzie gęstością prawdopodobieństwa znalezienia układu w punkcie $x \in [0, 1]$. Znajdź równanie wiążące ρ_{n+1} i ρ_n . Jak będzie wyglądało $\rho_n(x)$ w granicy $n \rightarrow \infty$ jeżeli $\rho_0(x)$ było dane jakąś funkcją gładką na $[0, 1]$?

2. **Entropia rozkładu normalnego** Jednowymiarowy rozkład normalny o średniej zero i odchyleniu standardowym σ jest dany przez

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Pokaż, że entropia tego rozkładu wynosi $\frac{1}{2}k \log(2\pi e\sigma^2)$ gdzie tym e to podstawa logarytmów naturalnych. Pokaż następnie, że dla ustalonego $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx = \sigma^2$ spośród wszystkich unormowanych rozkładów prawdopodobieństwa największą entropię ma właśnie rozkład normalny.

3. **Rozbicie Markowa dla przekształcenia piekarskiego.**

Rozpatrzmy znane nam z ćwiczeń przekształcenie piekarskie. Podzielmy kwadrat, na którym działa to przekształcenie, na cztery ćwiartki liniami $x = 1/2$ i $y = 1/2$. Wyprowadź równania M opisujące zależność od czasu prawdopodobieństw znalezienia układu w każdej z ćwiartek dla pewnego zbioru prawdopodobieństw początkowych. Jakie są wartości stacjonarne prawdopodobieństw dla każdej ćwiartki? Wskazówka: Przy wyliczaniu prawdopodobieństw przejścia pomiędzy ćwiartkami załóż, że punkty fazowe są równomiernie rozłożone w danej ćwiartce.

4. ***Ćwiczenia strzeleckie**

W pewnym nadleśnictwie w lubuskim w ramach szkoleń strzeleckich dla pracowników Służby Leśnej przeprowadzone są następujące ćwiczenia. Leśnik ustawiony jest w punkcie $(0, 0)$ w środku szkółki leśnej. W pozostałych punktach kratowych siatki o boku a , $x_{i,j} = a(i, j)$, $i, j \in \mathbb{Z}$, rosną drzewka, każde o promieniu ϵ . Leśnik oddaje strzał i zalicza szkolenie, jeśli trafi w przynajmniej jedno drzewko. Jakie jest prawdopodobieństwo, że leśnik zaliczy szkolenie, jeśli przyjmujemy, że - z nerwów - strzela w przypadkowym kierunku?