Termodynamika i fizyka statystyczna R - Zadania domowe - seria XII

Zadanie 1
Pokaż, że entropia kwantowego gazu doskonałego wyraża się wzorem:

$$S = -k_B \sum_k \left[\langle n_k \rangle \ln \langle n_k \rangle \mp (1 \pm \langle n_k \rangle) \ln (1 \pm \langle n_k \rangle) \right] \quad ,$$

(górny znak - bozony, dolny - fermiony).

Zadanie 2
Wyznaczyć stosunek temperatur Fermiego gazu doskonałego elektronów i protonów wewnątrz gwiazdy składającej się z całkowicie zjonizowanego wodoru.

Zadanie 3
Rozważ dwuwymiarowy gaz złożony z N nieoddziałujących nierelatywistycznych fermionów o spinie 1/2 w temperaturze $T = 0$. Gaz wypełnia powierzchnię o polu A.
a) znajdź energię Fermiego E_F dla tego gazu
b) znajdź energię wewnętrzną $u = U/N$ tego gazu jako funkcję E_F.

Zadanie 4
Równanie Diraca dla cząstek relatywistycznych ze spinem $\frac{1}{2}$ ma rozwiązania o energiach od $-\infty$ do $+\infty$. Dirac zasugerował, że stanowi próżni odpowiada wtedy sytuacja, w której wszystkie stany o energiach ujemnych sa obsadzone, podczas gdy stany o energiach dodatnich są puste. Taki stan nazywa się też czasem 'morzem Diraca'. Cząstka o energii ujemnej, która zaabsorbowała wystarczająco dużo energii aby przeskoczyć do stanu o energii dodatniej pozostawia za sobą 'dziurę' w morzu Diraca. Choć morze Diraca nie okazało się dobrym modelem relatywistycznej próżni, model ten znalazł jednak zastosowanie do opisu elektronów w prawie zapełnionym paśmie walencyjnym leżącym poniżej prawie pustego pasma przewodnictwa w półprzewodniku. Załóżmy że pasma te są opisane przez ciągłe widmo energii ϵ oraz gęstosc stanów $g(\epsilon)$ określoną jako:

$$g(\epsilon) = \begin{cases} A(\epsilon - \epsilon_0)^{\frac{1}{2}} & \epsilon_0 < \epsilon < \infty \\ B(-\epsilon)^{\frac{1}{2}} & \infty < \epsilon < 0 \end{cases} \tag{1}$$

gdzie A, B są pewnymi stałymi, a przedział $(0, \epsilon)$ odpowiada przerwie energetycznej.

(a) Pokaż, że jeśli ten układ ma temperaturę T oraz potencjał chemiczny μ, to prawdopodobieństwo że stan o energii $\mu + \alpha$ jest obsadzony jest takie samo jak to, że stan o energii $\mu - \alpha$ jest pusty.

(b) Znajdź zależność potencjału chemicznego od temperatury dla układu, o którym wiadomo, że jego stan w $T = 0$ odpowiada morzu Diraca (obsadzone wszystkie stany o energiach ujemnych). Dla szczególnego przypadku $A = B$ znajdź wyrażenia na liczbę cząstek oraz dziur w niskich temperaturach. Wskazówka: pokaż najpierw, że różnica między liczbą cząstek (o energiach $E > \epsilon$) i dziur (o energiach $E < 0$) jest stała (niezależna od temperatury).

Zadania oddajemy na wykładzie w dniu 12 czerwca

Piotr Szymczak