Zadanie 4.1.

Hamiltonian rozważanego ultrarelatywistycznego gazu wynosi:

$$H(\Gamma_N) = \sum_{i=1}^{N} c\,|\vec{p}_i|\,.$$

Zgodnie z definicją, mikrokanoniczna suma statystyczna jest zatem równa:

$$\Omega(E,V,N) = \int_{H(\Gamma_N)\leqslant E} \mathrm{d}\Gamma_N = \int_{\sum_{i=1}^N c|\vec{p}_i|\leqslant E} \frac{\mathrm{d}^N\vec{q}\,\mathrm{d}^N\vec{p}}{N!h^{3N}} = \frac{V^N}{N!h^{3N}}\int_{\sum_{i=1}^N |\vec{p}_i|\leqslant \frac{E}{c}} \mathrm{d}^N\vec{p}.$$

Całkę po współrzędnych pędowych możemy przeskalować i zapisać we współrzędnych sferycznych jako całkę iterowaną:

$$\int_{\sum_{i=1}^N |\vec{p}_i|\leqslant \frac{E}{c}} \mathrm{d}^N\vec{p} = \left(\frac{E}{c}\right)^{3N}(4\pi)^N\int_{\sum_{i=1}^N r_i\leqslant 1}\prod_{i=1}^N r_i^2\mathrm{d}r_i =$$
$$= \left(\frac{4\pi E^3}{c^3}\right)^N \int_0^1 r_1^2\mathrm{d}r_1\int_0^{1-r_1} r_2^2\mathrm{d}r_2\ldots\int_0^{1-\sum_{i=1}^{N-1} r_i} r_N^2\mathrm{d}r_N.$$

Obliczmy następującą całkę, wykonując całkowanie przez części:

$$I_n(A) = \int_0^A x^2(A-x)^n\mathrm{d}x = -\frac{1}{n+1}x^2(A-x)^{n+1}\Big|_0^A + \frac{2}{n+1}\int_0^A x(A-x)^{n+1}\mathrm{d}x =$$
$$= -\frac{2}{(n+1)(n+2)}x(A-x)^{n+2}\Big|_0^A + \frac{2}{(n+1)(n+2)}\int_0^A (A-x)^{n+2}\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}(A-x)^{n+3}\Big|_0^A = \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}A^{n+3}.$$

Łatwo sprawdzić, że dla $n=0$ wyprowadzony wzór daje poprawny wynik. Tego rodzaju całki z parametrem $A = 1-\sum_i^k r_i$ dostaniemy wykonując całkowanie po kolejnych promieniach w całce iterowanej. W rezultacie otrzymamy:

$$\Omega(E,V,N) = \frac{V^N}{N!h^{3N}}\left(\frac{4\pi E^3}{c^3}\right)^N\frac{2^N}{(3N)!} = \left(\frac{8\pi V E^3}{h^3c^3}\right)^N\frac{1}{N!(3N)!}E^{3N}.$$

Wobec tego zachodzi:

$$\omega(E,V,N) = \frac{\partial}{\partial E}\Omega(E,V,N) = 3N\left(\frac{8\pi V E^3}{h^3c^3}\right)^N\frac{1}{N!(3N)!}E^{3N-1}.$$

Zapiszmy wzór na entropię w granicy termodynamicznej:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{k_B}S(E,V,N) =& N\lim_{\infty}\frac{\ln\omega(E,V,N)}{N} = \\
&= N\lim_{\infty}\frac{1}{N}\left(\ln 3N + N\ln\left(\frac{8\pi V}{h^3c^3}\right) - \ln N! - \ln(3N)! + \right.\\
&\quad \left. + (3N-1)\ln E\right) = \\
&= N\lim_{\infty}\frac{1}{N}\left(N\ln\left(\frac{8\pi V}{h^3c^3}\right) - N\ln N + N - 3N\ln 3N + \right.\\
&\quad \left. + 3N + 3N\ln E\right) = \\
&= N\left(\ln\left(\frac{8\pi V}{Nh^3c^3}\right) + 3\ln\frac{E}{3N} + 4\right).
\end{aligned}
$$

Stąd otrzymujemy temperaturę gazu:

$$
T(E,V,N) = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)^{-1}_{V,N} = \frac{E}{3Nk_B}.
$$

Zadanie 4.2.

Jeżeli cząstki są nierozróżnialne, to każdy mikrostan charakteryzują jednoznacznie liczby cząstek znajdujących się w poszczególnych stanach w tym mikrostanie. Skoro całkowita energia układu wynosi zero, to liczba cząstek w stanie o energii ϵ jest równa liczbie cząstek w stanie o energii $-\epsilon$, a resztę stanowią cząstki w stanie o energii 0. Wobec tego liczba mikrostanów realizujących stan układu o zerowej całkowitej energii musi być równa mocy zbioru $\{0, 1, \ldots, \lfloor \frac{N}{2} \rfloor\}$. Dostajemy stąd wartość entropii:

$$S = k \ln \left(\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor + 1 \right).$$

Zadanie 4.3.

Niech $W(N)$ oznacza liczbę możliwych wypełnień paska $3 \times 2N$, a $V(N)$ — liczbę możliwych wypełnień paska $3 \times (2N + 1)$ pozbawionego jednego z narożników. Muszą być wówczas spełnione następujące zależności rekurencyjne:

$$\begin{cases} W(0) = V(0) = 1, \\ W(N) = W(N-1) + 2V(N-1), \\ V(N) = W(N) + V(N-1). \end{cases}$$

Wynika stąd $W(N-1) = W(N-2) + 2V(N-2)$ oraz $V(N-2) = V(N-1) - W(N-1) = \frac{1}{2}W(N) - \frac{3}{2}W(N-1)$, co daje:

$$W(N) = 4W(N-1) - W(N-2).$$

Znajdźmy rozwiązanie ogólne otrzymanego równania jednorodnego, podstawiając $W(N) = t^N$:

$$t^N = 4t^{N-1} - t^{N-2} \quad \Rightarrow \quad t^2 - 4t + 1 = (t - 2 - \sqrt{3})(t - 2 + \sqrt{3}) = 0.$$

Stąd rozwiązanie ogólne równania jednorodnego jest postaci:

$$W(N) = c_1(2+\sqrt{3})^N + c_2(2-\sqrt{3})^N, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Uwzględniając warunki brzegowe $W(0) = 1$ oraz $W(1) = 3$ wnioskujemy, że zachodzi:

$$c_1 = \frac{1}{6}(3+\sqrt{3}), \quad c_2 = \frac{1}{6}(3-\sqrt{3}).$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$W(N) = \frac{1}{6}\left((3+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^N + (3-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^N\right).$$

W granicy $N \to \infty$ możemy napisać:

$$S = k_B \ln W(N) \approx k_B \ln\left(\frac{1}{6}(3+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^N\right) \approx N k_B \ln\Big(2+\sqrt{3}\Big).$$

Zadanie 4.4.*

Twierdzenie: Dla dowolnych liczb $a_1, \ldots, a_n \in [0,1]$, nazywanych wagami, spełniających warunek $a_1 + \ldots + a_n = 1$, dowolnego przedziału $I \in \mathbb{R}$, dowolnych liczb $x_1, \ldots, x_n \in I$ oraz dowolnej funkcji f wklęsłej na I prawdziwa jest nierówność:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i).$$

Dowód: Przeprowadzimy rozumowanie indukcyjne. Dla $n = 1$ teza jest oczywista, natomiast dla $n = 2$ otrzymujemy definicję funkcji wklęsłej. Przyjmijmy, że teza zachodzi dla pewnego $n = k$. Dla dowolnych wag $a_1, \ldots, a_{k+1}$ spełniających założenia twierdzenia możemy wówczas napisać:

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i x_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^{k-1} a_i x_i + (a_k + a_{k+1})\left(\frac{a_k}{a_k + a_{k+1}} x_k + \frac{a_{k+1}}{a_k + a_{k+1}} x_{k+1}\right)\right) \geqslant \\ &\geqslant \sum_{i=1}^{k-1} a_i f(x_i) + (a_k + a_{k+1}) f\left(\frac{a_k}{a_k + a_{k+1}} x_k + \frac{a_{k+1}}{a_k + a_{k+1}} x_{k+1}\right) \geqslant \\ &\geqslant \sum_{i=1}^{k-1} a_i f(x_i) + a_k f(x_k) + a_{k+1} f(x_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} a_i f(x_i). \end{aligned}$$

Oznacza to, że teza zachodzi również dla $n = k + 1$. W przypadku funkcji ściśle wklęsłej i liczb $x_1, \ldots, x_n \in I$, z których co najmniej dwie są różne, nierówność dla $n = 2$ zmienia się w nierówność ostrą. W konsekwencji otrzymujemy wówczas nierówność ostrą dla dowolnego $n \geqslant 2$. □

Rozważmy następujące wyrażenie:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_B}\left(S - S^A - S^B\right) &= \sum_i p_i^A \ln p_i^A + \sum_j p_j^B \ln p_j^B - \sum_{i,j} p_{ij} \ln p_{ij} = \\ &= \sum_{i,j} p_{ij} \ln p_i^A + \sum_{i,j} p_{ij} \ln p_j^B - \sum_{i,j} p_{ij} \ln p_{ij} = \sum_{i,j} p_{ij} \ln\left(\frac{p_i^A p_j^B}{p_{ij}}\right). \end{aligned}$$

Logarytm naturalny jest funkcją ściśle wklęsłą, ponadto zachodzi $\sum_{i,j} p_{ij} = 1$, możemy zatem skorzystać z udowodnionego wyżej twierdzenia:

$$S - S^A - S^B = k_B \sum_{i,j} p_{ij} \ln\left(\frac{p_i^A p_j^B}{p_{ij}}\right) \leqslant k_B \ln\left(\sum_{i,j} p_i^A p_j^B\right) = k_B \ln(1) = 0.$$

Otrzymaliśmy żądaną nierówność. Zauważmy, że gdy $p_{ij} = p_i^A p_j^B$, to dostajemy:

$$S - S^A - S^B = k_B \sum_{i,j} p_{ij} \ln(1) = 0.$$

By mogła zachodzić równość, wszystkie argumenty logarytmu naturalnego muszą być takie same. Jednak wówczas całość może się zerować tylko dla $p_{ij} = p_i^A p_j^B$.