Termodynamika i Fizyka Statystyczna R – seria 2 rozwiązania

1. Kameleon

Kameleon zmienia się codziennie z koloru czerwonego na niebieski z prawdopodobieństwem 1/3 a na zielony 2/3, z koloru niebieskiego na czerwony lub zielony z prawdopodobieństwem 1/2 a z koloru zielonego na czerwony z prawdopodobieństwem 1/5 lub na niebieski z 4/5. Ile średnio dni będzie w każdym kolorze po długim czasie? Jaki jest średni czas powrotu do koloru zielonego?

$$z = 2c/3 + n/2,\ c = n/2 + z/5,\ n = c/3 + 4z/5$$

$z = 25/69 = 1/t_z$, $n = 26/69$, $c = 18/69$

2. Pchła

Pchła skacze po liczbach całkowitych od $-n$ do $+n$, startując z 0. Co sekundę skacze w o $+1$ z prawdopodobieństwem 2/3 i o -1 z prawdopodobieństwem 1/3. Ile średnio sekund zajmie jej dotarcie do $+n$ lub $-n$?

$t_k = 1 + t_{k-1}/3 + 2t_{k+1}/3$, $t_{\pm n} = 0$. Zgadujemy $t_k = A\lambda^k + B + Ck$ co daje

$$A + B + Ck = A\lambda^{-1}/3 + 2A\lambda/3 + 1 + B + C(k-1)/3 + 2C(k+1)/3$$

czyli $3\lambda = 1 + 2\lambda^2$, co daje $\lambda = 1, 1/2$ ale $\lambda \neq 1$, a ponadto B dowolne, $C = -3$. Z warunków brzegowych $2^{\mp n}A \mp 3n + B = 0$ czyli $(2^n + 2^{-n})A + 2B = 0$ oraz $(2^{-n} - 2^n)A = 6n$, $A = 6n/(2^{-n} - 2^n)$, $B = 3n(2^n + 2^{-n})/(2^n - 2^{-n})$, $t_0 = A + B = 3n(2^n + 2^{-n} - 2)/(2^n - 2^{-n}) = 3n(2^n - 1)/(2^n + 1)$.

3. Komputer kwantowy

Na komputerze kwantowym MBI można mierzyć kubity, które z prawdopodobieństwem p są w stanie 1 oraz $1 - p$ w stanie 0. Niestety, w ciągu 10^8 niezależnych pomiarów p zamiast być stałe, jak teoria przewiduje, zmieniało się liniowo od 0 do 1. Jakim w przybliżeniu rozkładem będzie opisywane prawdopodobieństwo pomiaru k stanów 1?

Średnia $N/2$, wariancja $\sum_{i=1}^{N} pq \simeq \int dn(1 - n/N)n/N = N\int_0^1 x(1-x)dx = N/6$. W przybliżeniu Gauss z taką średnią i wariancją.

4. (*) Koń

Skoczek szachowy porusza się po pustej planszy 8×8 całkowicie losowo, tj. z każdego pola przemieszcza się z równym prawdopodobieństwem na jedno z dostępnych pól (przypomnienie: możliwy ruch jest o wektor $(\pm 2, \pm 1)$ lub $(\pm 1, \pm 2)$ o ile pozostanie na planszy). Jak często będzie odwiedzał wybrany narożnik po długim czasie?

Można łatwo pokazać że w rozkładzie równowagowym $p \propto r$, gdzie r jest liczbą możliwych ruchów z danego pola. Dla 64 pól, mamy $r = 8$ w kwadracie 4×4 na środku, $r = 6$ na 4 prostokątach 4×1 przyległych do boków tego kwadratu, $r = 4$

na następnych prostokątach 4×1 (przyległych do boków szachownicy) oraz podnarożnikach (b2, b7, g2, g7), $r = 3$ na polach przyległych do narożników (a2, b1, a7, b8, h2, g1, h7, g8), i ostatecznie $r = 2$ dla narożników (a1, a8, h1, h8). Łącznie $R = 8 \cdot 16 + 6 \cdot 16 + 4 \cdot (16 + 4) + 3 \cdot 8 + 2 \cdot 4 = 8 \cdot (16 + 12 + 10 + 3 + 1) = 16 \cdot 21 = 336$. Wynik dla narożnika $2/336 = 1/168$

Rozwiązania zadań będą zbierane na wykładzie 16 marca.

Adam Bednorz