

# Teoria grup II

Pytania na egzamin (14.06, g. 15.00, SDT)

*Uwaga:* Na egzaminie wylosowane zostaną zestawy z trzech pytań, po jednym z każdej grupy. Pytania z pierwszej grupy wymagają dowodów (co nie znaczy, że pytania z drugiej nie).

## Pierwsza grupa pytań

1. Definicja grupy Liego. Przykłady. Odwzorowania dołączone  $\text{Ad}$ ,  $\text{ad}$ . Nawias  $[X, Y] = \text{ad}_X Y$ , jego własności.
2. Lewoniezmiennicze pola wektorowe na grupie Liego. Jednoparametrowe podgrupy, twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności. Odwzorowanie wykładnicze, jego własności.
3. Podrozmaitości włożone i zanurzone. Owinięcie torusa. Definicja podgrupy Liego i wirtualnej podgrupy Liego. Twierdzenie o związku pomiędzy pogrupami a podalgebrami Liego.
4. Forma Killinga algebry Liego. Definicja półprostych algebr Liego, przykłady. Lemat o formie Killinga ideału. Twierdzenie o rozkładzie algebry półprostej na ideały proste.
5. Lemat o różniczkowaniach algebry półprostej. Zwarte algebry Liego. Twierdzenie o ujemnej określoności formy Killinga oraz o postaci ogólnej zwartych algebr Liego. Wniosek z tego twierdzenia.
6. Twierdzenie o rozkładzie na podprzestrzenie pierwiastkowe.
7. Dalsze własności rozkładu na podprzestrzenie pierwiastkowe. Niezmienniczość układu pierwiastków względem odbić.
8. Kompleksyfikacja, urzeczywistnienie i formy rzeczywiste algebr Liego. Twierdzenie o istnieniu zwartej formy rzeczywistej dla zespolonej półprostej algebry Liego. Przykłady.
9. Abstrakcyjne układy pierwiastków. Pierwiastki dodatnie i proste. Lematy o kącie pomiędzy pierwiastkami prostymi i o istnieniu bazy.
10. Twierdzenie o generatorach kanonicznych półprostej algebry Liego. Klasyfikacja zespolonych półprostych algebr Liego.
11. Twierdzenie o klasyfikacji reprezentacji nieprzywiedlnych algebry Liego  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ .
12. Najwyższa waga reprezentacji i najwyższy wektor wagowy. Twierdzenie o nich. Twierdzenie o klasyfikacji reprezentacji nieprzywiedlnych zespolonej półprostej algebry Liego. Przykłady.

## Druga grupa pytań

1. Automorfizmy algebry Liego  $\mathfrak{g}$ . Lemat o algebrze Liego grupy Liego  $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ . Grupa dołączona, jej algebra Liego.
2. Zewnętrzna i wewnętrzna suma prosta algebr Liego. Ideały w algebrach Liego, komutant, przykłady. Związek pomiędzy ideałami a podgrupami normalnymi.
3. Algebra  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$  jako algebra półprosta.
4. Rozwiązalne i nilpotentne algebry Liego. Przykłady. Forma Killinga algebry nilpotentnej. Twierdzenia Engela i Cartana.
5. Iloczyn półprostych algebr Liego. Rozszerzenia algebr Liego. Lemat o rozszerzeniach rozszczepialnych. Radykał algebry Liego. Twierdzenie Leviego. Przykłady.
6. Elementy regularne i podalgebry Cartana. Przykłady.
7. Lemat o jednoczesnej diagonalizacji operatorów komutujących. Pierwiastki i podprzestrzenie pierwiastkowe. Przykłady.
8. Klasyczne półproste algebry Liego  $\mathfrak{a}_n, \mathfrak{b}_n, \mathfrak{c}_n, \mathfrak{d}_n$ , ich pierwiastki i podprzestrzenie pierwiastkowe.
9. Część rzeczywista podalgebry Cartana. Lemat o ograniczeniu formy Killinga. Twierdzenie o istotności układu pierwiastków.
10. Macierz Cartana układu pierwiastków. Przykłady. Jak macierz Cartana i baza wyznaczają układ pierwiastków. Twierdzenie o jednoznaczności.
11. Graf Coxetera i diagram Dynkina układu pierwiastków. Przykłady. Klasyfikacja diagramów Dynkina.
12. Wagi reprezentacji algebr półprostych. Krata wagowa. Przykłady.

**Trzecia grupa pytań:** wszystkie ćwiczenia ze skryptu