

Teoria grup I

Pytania na egzamin ustny

1. Pojęcie grupy, podgrupy, grupy zachowującej strukturę. Działanie grupy na zbiorze, orbity i stabilizatory. Grupy symetrii. Przykłady.
2. Homomorfizmy grup, grupa automorfizmów, podgrupy normalne, grupa ilorazowa. Przykłady.
3. Iloczyny proste i półproste, przykłady. Rozszerzenia i kohomologie grup.
4. Związek pomiędzy rozszerzeniami i kohomologiami grup: lemat o dopuszczalnych mnożeniach. Przykład rozszerzenia nie będącego iloczynem półprostym.
5. Grupa euklidesowa, grupy dyskretne, obszary fundamentalne. Przykłady. Grupy krystalograficzne, twierdzenie Bieberbacha.
6. Twierdzenie Zassenhausa, algorytm Zassenhausa klasyfikacji grup krystalograficznych.
7. Zastosowanie algorytmu Zassenhausa dla grup tapetowych. Ograniczenie krystalograficzne. Obliczenie grup kohomologii $H^2(C_2, \mathbb{Z}^2)$.
8. Reprezentacje grupy w przestrzeni wektorowej. Przykłady. podprzestrzenie niezmiennicze, reprezentacje nieprzywiedlne i w pełni przywiedlne. Przykłady.
9. Twierdzenie o zupełnej przywiedlności reprezentacji grup skończonych. Operacje na reprezentacjach.
10. Charakter reprezentacji, własności charakterów, operatory splatające.
11. Lemat Schura i twierdzenie o relacjach ortogonalności dla charakterów.
12. Twierdzenie o tym, że reprezentacje są „wyznaczone” przez swoje charaktery z dokładnością do równoważności. Kryterium nieprzywiedlności reprezentacji. Twierdzenie o bazie ortonormalnej w przestrzeni funkcji klas.
13. Reprezentacja regularna oraz twierdzenie o jej rozkładzie na nieprzywiedlne. Reprezentacje nieprzywiedlne grup abelowych. Komutant grupy i jego związek z reprezentacjami. Przykłady.
14. Pierścienie, algebry, moduły nad pierścieniami i algebrami. Konstrukcja iloczynu tensorowego modułów. Algebra grupowa grupy skończonej, związek modułów z reprezentacjami.
15. Reprezentacje indukowane, lemat o jednoznaczności reprezentacji indukowanej.

16. Twierdzenie o charakterze reprezentacji indukowanej. Wzór wzajemności Frobeniusa. Przykład grupy ostrosłupa.
17. Kompleksyfikacja przestrzeni wektorowej, struktura rzeczywista na przestrzeni wektorowej, struktura zespolona, forma rzeczywista. Algebra kwaternionów, struktura kwaternionowa i forma zespolona.
18. Struktura rzeczywista i kwaternionowa na reprezentacji zespolonej. Reprezentacja sprzężona. Lemat o operatorze splatającym pomiędzy ρ i $\bar{\rho}$, typy reprezentacji. Twierdzenie Frobeniusa–Schura, przykład.
19. Grupy Liego, podgrupy Liego, algebraiczne grupy liniowe. Przykłady.
20. Algebry Liego, podalgebry Liego, homomorfizmy algebr liego. Przykłady. Algebra Liego różniczkowań algebry łącznej.
21. Algebra Liego pól wektorowych. Algebra Liego pól lewoniezmienniczych na grupie Liego. Przykład. Twierdzenia Liego.