Teoria grup I

Wykład 9

1 Reprezentacje indukowane, cz. I

Literatura dodatkowa: [Ser88, CR88]

Dygresja algebraiczna:

Pierścień: Jest to grupa abelowa $(A, +)$ (odpowiednie działanie nazywamy dodawaniem) wyposażona w dodatkowe działanie $(a, b) \mapsto a \cdot b$ (nazywane mnożeniem), które spełnia następujące aksjomaty:

1. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ $\forall a, b, c \in A$ (mnożenie jest łączne);

2. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ $\forall a, b, c \in A$.

Mówimy, że $(A, +, \cdot)$ jest pierścieniem z jedynką, jeśli istnieje element $1 \in A$ będący elementem neutralnym względem mnożenia, tj. $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ $\forall a \in A$.

Przykład: Pierścień $\mathbb{Z}$ liczb całkowitych.

Przykład: Każde ciało $\mathbb{K}$ jest pierścieniem.

Przykład: Zbiór $\mathrm{Fun}(X, \mathbb{K})$ funkcji na dowolnym zbiorze X o wartościach w dowolnym ciele $\mathbb{K}$ jest piersćieniem z jedynką (1 jest funkcja stała, równa jeden). Jest to przykład pierścienia *przemiennego* nie będącego ciałem (o ile zbiór X jest więcej niż jednoelementowy).

Przykład: Zbiór $\mathrm{Mat}(k, \mathbb{K})$ macierzy $k \times k$ o wyrazach w ciele $\mathbb{K}$ jest pierścieniem z jedynką $(1 = I)$. Jest to przykład pierścienia *nieprzemiennego* (o ile $k > 1$).

Przykład: Zbiór $C_0(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ funkcji *ciagłych* na $\mathbb{R}^k$ o wartościach w $\mathbb{R}$ znikających w zerze jest przykładem pierścienia bez jedynki.

Lewy moduł nad pierścieniem A z jedynką: Jest to grupa abelowa $(M, +)$ wyposażona w działanie $\nu : A \times M \to M$ (zapis skrócony $\nu(a, m) := am, a \in A, m \in M$), które spełnia następujące aksjomaty:

1. $a(m + n) = am + an$ $\forall a \in A, m, n \in M$;

2. $(a + b)m = am + bm$ $\forall a, b \in A, m \in M$;

3. $(a \cdot b)m = a(bm)$ $\forall a, b \in A, m \in M$;

4. $1m = m$ $\forall m \in M$.

Uwaga: Analogicznie definiujemy pojęcie *prawego* modułu nad A. Jeśli pierścień jest przemienny, każdy lewy moduł może być przekształcony w prawy $ma := am$ i odwrotnie.

PRZYKŁAD: Niech $A := \mathbb{K}$ będzie ciałem, a M przestrzenią wektorową nad $\mathbb{K}$. Wtedy M jest lewym (i prawym) $\mathbb{K}$-modułem.

PRZYKŁAD: Niech $A := \mathrm{Fun}(X, \mathbb{K})$, a $M := \mathrm{Fun}(X, \mathbb{K}^k)$ będzie zbiorem funkcji na X o wartościach w $\mathbb{K}^k$. Wtedy M jest lewym modułem nad A względem naturalnego mnożenia wektor-funkcji przez funkcję.

PRZYKŁAD: Niech $A := \mathrm{Mat}(k, \mathbb{K})$, a $M := \mathbb{K}^k$. Wtedy M jest lewym modułem nad A względem naturalnego działania macierzy na wektory kolumny.

PRZYKŁAD: Niech $M := A$ i $ab := a \cdot b$. Wtedy M jest modułem nad sobą. Ogólniej, niech $M := A \times \cdots \times A$ będzie iloczynem prostym grup $(A, +)$. Wprowadzając działanie $a(a_1, \ldots, a_k) := (a \cdot a_1, \ldots, a \cdot a_k)$ otrzymujemy lewy A-moduł A^k.

PRZYKŁAD: Każda grupa abelowa $(H, +)$ jest lewym modułem nad $\mathbb{Z}$. Działanie zadajemy tak: $nh := h + \cdots + h$ (n razy). Odwrotnie, każdy $\mathbb{Z}$-moduł jest poprostu grupą abelową.

Morfizm modułow N i M nad A: Jest to homomorfizm $f : M \to N$ grup $(M, +), (N, +)$ „respektujący" działanie A, czyli taki, że $f(am) = af(m), a \in A, m \in M$. *Izomorfizmem* nazywamy morfizm będący bijekcją (odwrotność jest automatycznie morfizmem - *Ćwiczenie*).

Iloczyn tensorowy modułów M i N nad A: Niech N będzie *lewym*, a M *prawym* modułem nad A. Niech H będzie dowolną grupą abelową oraz $f : M \times N \to H$ będzie homomorfizmem grup o własnościach 1) $f(m_1 + m_2, n) = f(m_1, n) + f(m_2, n)$ $\forall m_1, m_2 \in M, n \in N$; 2) $f(m, n_1 + n_2) = f(m, n_1) + f(m, n_2)$ $\forall m \in M, n_1, n_2 \in N$; 3) $f(ma, n) = f(m, an)$ $\forall m \in M, n \in N, a \in A$. Wtedy mówimy, że f jest *zbalansowany.*

Konstrukcja: Niech $F(M, N)$ oznacza zbiór formalnych skończonych kombinacji liniowych elementów z $M \times N$ o współczynnikach całkowitych. Jest to $\mathbb{Z}$-moduł, czyli grupa abelowa. Przez $F_0(M, N)$ oznaczamy podgrupę generowaną przez elementy postaci $(m_1 + m_2, n) - (m_1, n) - (m_2, n), (m, n_1 + n_2) - (m, n_1) + (m, n_2), (ma, n) - (m, an)$. Połóżmy $M \otimes_A N := F(M, N)/F_0(M, N)$ oraz określmy $\pi : M \times N \to M \otimes_A N$ wzorem $\pi(m, n) :=: m \otimes n := (m, n) + F_0(M, N)$.

TWIERDZENIE 1. *Kanoniczne odwzorowanie $\pi : M \times N \to M \otimes_A N$ jest zbalansowanym homomorfizmem grup.*

2. *Dla dowolnej grupy abelowej H oraz homomorfizmu zbalansowanego $f : M \times N \to H$ istnieje jedyny homomorfizm grup $M \otimes_A N \to H$ taki, że następujący diagram jest przemienny:*

$$\begin{tikzcd} M \otimes_A N \arrow[dr] & \\ M \times N \arrow[u, "\pi"] \arrow[r, "f"] & H. \end{tikzcd}$$

3. *Jeśli dodatkowo M jest* lewym *modułem nad pierścieniem A', to $M \otimes_A N$ też jest lewym A' modułem (działanie zadajemy tak: $a'(m \otimes n) := (a'm) \otimes n$).*

Dowod - Ćwiczenie

Algebra nad ciałem $\mathbb{K}$*:* jest to pierścień $(A, +, \cdot)$ wyposażony w dodatkowe działanie $\mathbb{K} \times A \to A$ (mnożenie przez skalary) takie, że 1) $(A, +)$ wraz z tym działaniem jest przestrzenią wektorową; 2) $\alpha(a \cdot b) = (\alpha a) \cdot b = a \cdot (\alpha b)$ $\forall \alpha \in \mathbb{K}, a, b \in A$.

PRZYKŁAD: Wszystkie powyższe przykłady pierścieni oprócz $\mathbb{Z}$ są jednocześnie przykładami algebr.

Lewy moduł nad algebrą A *z jedynką:* Jest to lewy moduł M nad pierścieniem $(A, +, \cdot)$ wyposażony w dodatkową strukturę przestrzeni wektorowej nad $\mathbb{K}$, przy czym $(\alpha a)m = a(\alpha m)$ $\forall \alpha \in \mathbb{K}, a \in A, m \in M$.

PRZYKŁAD: Wszystkie powyższe przykłady modułów oprócz modułów nad $\mathbb{Z}$ są jednocześnie przykładami modułów nad algebrami.

Algebra grupowa $\mathbb{C}[G]$ grupy skończonej G: Jest to przestrzeń wektorowa $V_{reg} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{e_1, \ldots, e_n\}$ reprezentacji regularnej, w której zadane jest naturalne mnożenie: $(\alpha_1 e_1 + \cdots \alpha_n e_n) \cdot (\beta_1 e_1 + \cdots \beta_n e_n) := \sum_{ij} \alpha_i \beta_j e_i \cdot e_j$. Algebra $\mathbb{C}[G]$ jest algebrą z jedynką $(1 = e_1 = e)$.

Uwaga: Inne spojrzenie na algebrę grupową (które jest bardziej stosowne pod kątem uogólnienia na grupy nieskończone) jest następujące. Rozważmy zbiór $\mathrm{Fun}(G, \mathbb{C})$ funkcji na G o wartościach w $\mathbb{C}$ i zadajmy w nim mnożenie (splot funkcji) następującym wzorem:

$$F * S(g) := \sum_{h \in G} F(gh^{-1}) S(h).$$

Niech E_i oznacza funkcję zadaną wzorem $E_i(e_j) = \delta_{ij}$ i niech $e_i \cdot e_j = e_k$. Wtedy $E_i * E_j(e_r) = \sum_{l=1}^{n} E_i(e_r e_l^{-1}) E_j(e_l) = E_i(e_r e_j^{-1}) = \begin{cases} 1 \text{ jeśli } e_i e_j = e_r \\ 0 \text{ jeśli } e_i e_j \neq e_r \end{cases} = E_k(e_r)$. Stąd $E_i * E_j = E_k \Leftrightarrow e_i \cdot e_j = e_k$, czyli widzimy izomorfizm algebr $(\mathbb{C}[G], \cdot)$ i $(\mathrm{Fun}(G, \mathbb{C}), *)$.

Reprezentacje G = lewe $\mathbb{C}[G]$-moduły: Niech V będzie przestrenią wektorową nad $\mathbb{C}$, w której liniowo działa grupa skończona G. Wtedy V jest lewym modułem nad $\mathbb{C}[G]$: $(\alpha_1 e_1 + \cdots \alpha_n e_n)x := \alpha_1 e_1 x + \cdots \alpha_n e_n x$. Łatwo sprawdzić, że aksjomaty działania implikują aksjomaty modułu. Odwrotnie, jeśli V jest lewym $\mathbb{C}[G]$-modułem, ograniczając się do działania elementów bazowych $e_1, \ldots, e_n$ otrzymujemy rprezentacje grupy G w V.

Uwaga: Operatory splatające pomiędzy dwiema reprezentacjami V_1 i V_2 odpowiadają morfizmom $\mathbb{C}[G]$-modułow (*Ćwiczenie:* sprawdzić).

Literatura

[CR88] Charles W. Curtis and Irving Reiner, *Representation theory of finite groups and associative algebras*, John Wiley and Sons, 1988.

[Ser88] Jean-Pierre Serre, *Reprezentacje liniowe grup skończonych*, PWN, 1988.