Teoria grup I

Wykład 8

1 Elementarna teoria reprezentacji, cz. III

Literatura dodatkowa: [Ser88]

Założenia: Jak i w poprzednim, w tym rozdziale rozpatrujemy tylko skończone grupy G i ich skończeniewymiarowe reprezentacje w przestrzeniach wektorowych nad $\mathbb{C}$.

Charakter reprezentacji wyznacza ją z dokładnością do równoważności:

Twierdzenie *1. Niech $\rho : G \to GL(V)$ będzie reprezentacją, a $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ jej rozkładem na podreprezentacje nieprzywiedlne*[1]*. Jeśli $\rho_0 : G \to W$ jest pewną reprezentacją nieprzywiedlną, to ilość składowych W_i równoważnych z W jest równa $(\chi_\rho|\chi_{\rho_0})$ (liczbę tę nazywamy* krotnością wchodzenia *reprezentacji W w reprezentację V).*

2. Reprezentacje o tych samych charakterach są równoważne.

Dowód: Ad. 1. Na mocy twierdzeń z poprzedniego wykładu mamy $\chi_\rho = \chi_1 + \cdots + \chi_k$, gdzie χ_i jest charakterem reprezentacji W_i, oraz

$$(\chi_\rho|\chi_{\rho_0}) = (\chi_1|\chi_{\rho_0}) + \cdots + (\chi_k|\chi_{\rho_0}) = \dim \mathrm{Hom}_G(W_1, W) + \cdots + \dim \mathrm{Hom}_G(W_k, W).$$

Lemat Schura, z kolei, mówi, że w ostatniej sumie „przeżywają” tylko te człony, które odpowiadają składowym W_i równoważnym z W.

Ad. 2. Niech $\rho_1 : G \to GL(V_1), \rho_2 : G \to GL(V_2)$ będą dwiema reprezentacjami z $\chi_{\rho_1} = \chi_{\rho_2}$. Wtedy dowolna nieprzywiedlna reprezentacja $\rho : G \to GL(W)$ wchodzi w V_1 i V_2 z jedna i tę samą krotnością, równą $(\chi_\rho|\chi_{\rho_1}) = (\chi_\rho|\chi_{\rho_2})$. $\square$

Kryterium nieprzywiedlności reprezentacji:

Twierdzenie *Reprezentacja $\rho : G \to GL(V)$ jest nieprzywiedlna wtedy i tylko wtedy, gdy $(\chi_\rho|\chi_\rho) = 1$.*

Dowód: Jeśli V jest nieprzywiedlna, to „wchodzi w siebie” z krotnością 1. Odwrotnie, niech ρ będzie dowolną reprezentacją, a $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ jej rozkładem na podreprezentacje nieprzywiedlne.

[1] Taki rozkład jest dalece niejednoznaczny. Np. dla reprezentacji grupy $G := \mathbb{C}^* = (\mathbb{C}_{\neq 0}, \cdot)$ w przestrzeni $\mathbb{C}^2$ zadanej wzorem $\mathbb{C}^* \ni \lambda \mapsto \lambda I \in GL(2, \mathbb{C})$ każda podprzestrzeń 1-wymiarowa będzie podreprezentacją nieprzywiedlna. Czyli $\mathbb{C}^2$ można rozłożyć na nieprzywiedlne na nieskończenie wiele sposobów.

Wtedy $(\chi_\rho|\chi_\rho) = \sum_{ij}(\chi_i|\chi_j)$. Z relacji ortogonalności wnioskujemy, że, jeśli ta suma jest równa 1, to $k = 1$.

Ile jest reprezentacji nieprzywiedlnych? *Klasą sprzężoności* nazywamy orbitę działania $G \ni a \mapsto A_a \in \mathrm{Aut}(G)$ grupy G na sobie poprzez automorfizmy wewnętrzne. Innymi słowy, dwa elementy $a, b \in G$ należą do jednej klasy spzężoności wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $g \in G$ taki, że $a = gbg^{-1}$.

Funkcją klas nazywamy funkcję $F : G \to \mathbb{C}$ *stałą* na klasach sprzężoności. Funkcje klas tworzą przestzeń wektrową, którą będziemy oznaczali prez $\mathrm{Cl}(G)$. Z poprzedniego wykładu wiemy, że każdy charakter reprezentacji jest funkcją klas. Okazuje się, że charaktery prawie wyczerpują funkcje klas. Dokładniej, ma miejsce

TWIERDZENIE *1. Charaktery reprezentacji nieprzywiedlnych tworzą bazę ortonormalną przestrzeni* $\mathrm{Cl}(G)$.

2. Ilość nierównoważnych reprezentacji nieprzywiedlnych grupy G jest równa liczbie klas spręzoności.

Dowód: Ad. 2. Z punktu 1 wynika, że liczba nierównoważnych reprezentacji nieprzywiedlnych jest równa $\dim \mathrm{Cl}(G)$. Z drugiej strony funkcja klas wyznacza się jednoznacznie przez swoje wartości na tych klasach, czyli $\dim \mathrm{Cl}(G)$ jest równe liczbie klas sprzężoności. □

Żeby udowodnić punkt 1 musimy udowodnić pewny lemat i omówić tzw. *reprezentację regularną* grupy.

LEMAT *Niech $\rho : G \to GL(V)$ będzie pewną reprezentacją, a $F \in \mathrm{Cl}(G)$. Wtedy:*

1. *Operator $L(\rho, F) : \sum_{g\in G} \overline{F(g)}\rho(g) : V \to V$ jest operatorem splatającym (pomiędzy ρ i ρ);*
2. *W przypadku, gdy ρ jest nieprzywiedlna, $L(\rho, F) = \lambda\,\mathrm{Id}_V$ oraz $\lambda = \frac{|G|}{\dim V}(F|\chi_\rho)$.*

Dowód: Ad. 1. Mamy $\rho(h)L(\rho, F)\rho(h)^{-1} = \sum_{g\in G} \overline{F(g)}\rho(h)\rho(g)\rho(h)^{-1} = \sum_{g\in G} \overline{F(g)}\rho(hgh^{-1}) = \sum_{g\in G} \overline{F(g)}\rho(g) = L(\rho, F)$, więc $\rho(h)L(\rho, F) = L(\rho, F)\rho(h)$ dla dowolnego $h \in G$, czyli L jest operatorem splatającym.

Ad. 2. Z lematu Schura wnioskujemy, że $L(\rho, F) = \lambda\,\mathrm{Id}_V$. Obliczmy ślad tego operatora. Z jednej strony $\mathrm{Tr}(\lambda\,\mathrm{Id}_V) = \lambda \dim V$, z innej zaś

$$\mathrm{Tr}\, L(\rho, F) = \sum_{g\in G} \overline{F(g)}\,\mathrm{Tr}\,\rho(g) = \sum_{g\in G} \overline{F(g)}\chi_\rho(g) = |G|(F|\chi_\rho).\square$$

Reprezentacja regularna grupy G: Oznaczmy elementy grupy G przez $e_1, \ldots, e_n$, przy czym niech $e_1 := e$. Wtedy G działa na $\{e_1, \ldots, e_n\}$ z lewej strony przez lewe mnożenie: $e_i \mapsto ge_i$. Oznaczmy przez V_{reg} przestrzeń wektorową rozpiętą przez wektory $e_1, \ldots, e_n$ orzaz przedłużmy powyższe działanie do liniowego działania na V_{reg} według liniowości (czyli $g(\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n) := \alpha_1 ge_1 + \cdots + \alpha_n ge_n$). Otrzymaną reprezentację nazywamy (lewą) *regularną* reprezentacją grupy G.

Dowód punktu 1 twierdzenia: Z relacji ortogonalności wiemy, że charaktery reprezentacji nieprzywiedlnych tworzą układ ortonormalny. Czyli, do udowodnienia zostaje tylko *zupełność* tego układu. Innymi słowy, musimy dowieść, że nie istnieje funkcji klas ortogonalnej do wszystkich charakterów reprezentacji nieprzywiedlnych.

Otóż niech F taka funkcja. Wtedy, według powyższego lematu, operator $L(\rho, F)$ jest zerowy dla dowolnej nieprzywiedlnej reprezentacji ρ. Ponieważ każda reprezentacja rozkłada się na nieprzywiedlne, mamy też $L(\rho, F) = 0$ dla dowolnej reprezentacji, w szczególności dla reprezentacji regularnej $\rho = \rho_{reg}$. Stąd

$$0 = L(\rho_{reg}, F)e_1 = \sum_{g \in G} \overline{F(g)} g e_1.$$

Ponieważ wektory $\{ge_1\}_{g\in G}$ tworzą układ liniowo niezależny w V_{reg}, mamy $\overline{F(g)} = 0$ dla każdego $g \in G$, czyli $F \equiv 0$. $\square$

Rozkład reprezentacji regularnej na nieprzywiedlne:

Twierdzenie 1. *Każda reprezentacja nieprzywiedlna $\rho_i : G \to GL(V_i)$ wchodzi w V_{reg} z krotnością równą swojemu wymiarowi $n_i := \dim V_i$.*

2. *Wymiary n_i spełniają tożsamość.*

$$\sum_i n_i^2 = |G|.$$

Dowód: Ad. 1. Niech $g \neq e$, wtedy dla każdego $h \in G$ mamy $gh \neq h$. Czyli dla każdego i wektor $\rho_{reg}(g)e_i$ w rozkładzie po bazie $e_1, \ldots, e_n$ nie ma nietrywialnego składnika proporcjonalnego do e_i. Stąd wnioskujemy, że wszystkie wyrazy diagonalne macierzy operatora $\rho_{reg}(g)$ w bazie $e_1, \ldots, e_n$ są zerowe i $\operatorname{Tr} \rho_{reg}(g) = \chi_{\rho_{reg}}(g) = 0$.

Z kolei $\chi_{\rho_{reg}}(e) = \operatorname{Tr} \mathrm{Id}_{V_{reg}} = |G|$.

Stosując twierdzenie o krotności wchodzenia, mamy

$$(\chi_{\rho_{reg}}|\chi_{\rho_i}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \overline{\chi_{\rho_{reg}}(g)} \chi_{\rho_i}(g) = \frac{1}{|G|} \overline{\chi_{\rho_{reg}}(e)} \chi_{\rho_i}(e) = \frac{1}{|G|} |G| \chi_{\rho_i}(e) = n_i.$$

Ad. 2. Z punktu 1 widzimy, że $\chi_{\rho_{reg}} = \sum_i n_i \chi_{\rho_i}$. Obliczjąc to wyrażenie na elemencie neutralnym e, otrzymujemy szukaną tożsamość. $\square$

Reprezentacje nieprzywiedlne $\rho : G \to GL(V)$ grup abelowych: Są jednowymiarowe. Istotnie, ponieważ $gh = hg$, mamy $\rho(g)\rho(h) = \rho(h)\rho(g)$ dal wszystkich $g, h \in G$, skąd operator $\rho(h)$ jest operatorem splatającym dla ρ. Według lematu Schura ma być postaci $\rho(h) = \lambda(h) \mathrm{Id}_V$ przy czym $\lambda(h_1 h_2) = \lambda(h_1)\lambda(h_2)$, czyli $\lambda : G \to \mathbb{C}^* = GL(1, \mathbb{C})$ jest homomorfizmem. Jasne, że reprezentacja $h \to \lambda(h) \mathrm{Id}_V$ jest nieprzywiedlna wtedy i tylko wtedy, gdy $\dim V = 1$ (lub 0, co nie rozpatrujemy, bo jest trywialne).

Zauważmy, że reprezentacja jednowymiarowa $G \to GL(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ każdej grupy pokrywa się ze swoim charakterem $\chi_\rho : G \to \mathbb{C}$.

Przykład: Znajdźmy wszystkie nieprzywiedlne reprezentacje grupy cyklicznej $C_n = \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$. Wiemy, że są jednowymiarowe i, ponieważ wymiar reprezentacji regularnej jest n, ma ich być n. Każda taka reprezentacja ma postać $e \mapsto 1, a \mapsto \lambda = \chi(a) \in \mathbb{C}^*, a^k = \lambda^k, k = 2, \ldots, n-1$, przy czym $\lambda^n = 1$. Stąd λ musi być jednym z pierwiastków n-go stopnia z jedynki $\{1, \epsilon, \epsilon^2, \ldots, \epsilon^{n-1}\}, \epsilon = e^{2i\pi/n}$. Tabela charakterów dla $n = 4$ ma postać

	e	a	a^2	a^3
χ_0	1	1	1	1
χ_1	1	ϵ	ϵ^2	ϵ^3
χ_2	1	ϵ^2	1	ϵ^2
χ_3	1	ϵ^3	ϵ^2	ϵ

PRZYKŁAD: Grupa $D_2 \cong V_4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Ogólnie grupa D_n symetrii n-kąta foremnego składa się z elementów postaci $e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}$, gdzie a obrót płaszczyzny o kąt $2\pi/n$ oraz elementów postaci $s, sa, sa^2, \ldots, sa^{n-1}$, gdzie s jakiekolwiek odbicie zachowujące wielokąt. Elementy te spełniają następujące relacje: $a^n = e, s^2 = e, sa^k s = a^{-k}$. Grupa D_n jest iloczynem półprostym $C_2 \times fC_n$. Tutaj $C_2 := \{e, s\}, f : C_2 \to \mathrm{Aut}C_n$ jest dane wzorem $f(e) = \mathrm{Id}, f(s)a^k = a^{-k}$.

W szczególności, D_2, grupa symetrii 2-kąta foremnego (jak śmiesznie to nie brzmi), składa się z e, a, s, sa. Ponieważ $sas = a^{-1} = a$ i $s^{-1} = s$, mamy $sa = as$ oraz $asa = s = saa, ssa = a = sas$, czyli jest przemienna. Ma więc mieć 4 jednowymiarowe reprezentacje nieprzywiedlne. Każdy z elementów g grupy jest inwolucją, czyli $g^2 = e$, skąd odpowiadająca mu 1×1-macierz $\rho(g)$ musi być równa ± 1. Ponadto $\rho(e) = 1$. Łatwo się przekonać, że tylko następujące 4 wektory spełnieją te wymogi i tworzą układ ortonormalny:

	e	a	s	sa
χ_0	1	1	1	1
χ_1	1	-1	1	-1
χ_2	1	-1	-1	1
χ_3	1	1	-1	-1

Komutant grupy i reprezentacje: *Komutantem* G' grupy G nazywamy najmniejszą podgrupę normalną $G' \subset G$ taką, że grupa ilorazowa G/G' jest abelowa. Jeśli $\rho' : G/G' \to GL(V)$ jest reprezentacją nieprzywiedlną grupy G/G' (V musi być 1-wymiarowe), to $\rho' \circ \pi$, gdzie $\pi : G \to G/G'$ jest rzutem naturalnym, jest nieprzywiedlną reprezentacją grupy G.

PRYKŁAD: Niech $G := D_3$. Wtedy $G' = C_3 = \{e, a, a^2\}$ a $G/G' \cong C_2$. Klasy sprzężoności są następujące $\{e\}, \{a, a^2\}, \{s, sa, sa^2\}$. Grupa G ma 2 reprezentacje nieprzywiedlne 1-wymiarowe pochodzące z reprezentacji $G/G' = C_2$. Oto ich charaktery

	e	a	a^2	s	sa	sa^2
χ_0	1	1	1	1	1	1
χ_1	1	1	1	-1	-1	-1

Reprezentacja regularna jest 6-wymiarowa, więc mamy dwie możliwości: albo jeszcze 4 reprezentacje 1-wymiarowe, albo jedna reprezentacja 2-wymiarowa (wchodząca z krotnością 2). Okazuje się, że zachodzi druga możliwość: rozważmy naturalną reprezentację G na $\mathbb{R}^2$ daną wzorami $a \mapsto \begin{pmatrix} \cos 2\pi/3 & -\sin 2\pi/3 \\ \sin 2\pi/3 & \cos 2\pi/3 \end{pmatrix}, s \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ i zinterpretujmy ją jako reprezentację w $\mathbb{C}^2$. Tabelka uzupełni się do następującej:

	e	a	a^2	s	sa	sa^2
χ_0	1	1	1	1	1	1
χ_1	1	1	1	-1	-1	-1
χ_2	2	-1	-1	0	0	0

Ponieważ $(\chi_2|\chi_2) = 1$, odpowiednia reprezentacja jest nieprzywiedlna.

Prykład: Niech $G := D_4$. Wtedy $G' = C_2 = \{e, a^2\}$ a $G/G' \cong D_2$. Istotnie, $sa^2s = a^2, (sa)a^2(sa)^{-1} = (sa)a^2a^3s = sa^2s = a^2, (sa^2)a^2(sa^2)^{-1} = sa^2a^2a^2s = a^2, (sa^3)a^2(sa^3)^{-1} = sa^3a^2as = a^2$, czyli G' jest normalna. Oto odpowiednie warstwy i ich tabelka mnożenia:

	$\{e, a^2\}$	$\{a, a^3\}$	$\{s, sa^2\}$	$\{sa, sa^3\}$
$\{e, a^2\}$	$\{e, a^2\}$	$\{a, a^3\}$	$\{s, sa^2\}$	$\{sa, sa^3\}$
$\{a, a^3\}$	$\{a, a^3\}$	$\{e, a^2\}$	$\{sa, sa^3\}$	$\{s, sa^2\}$
$\{s, sa^2\}$	$\{s, sa^2\}$	$\{sa, sa^3\}$	$\{e, a^2\}$	$\{a, a^3\}$
$\{sa, sa^3\}$	$\{sa, sa^3\}$	$\{s, sa^2\}$	$\{a, a^3\}$	$\{e, a^2\}$

Stąd widzimy izomorfizm $G/G' \cong D_2$. Klasy sprzężoności są następujące: $\{e\}, \{a^2\}, \{a, a^3\}, \{s, sa^2\}, \{sa, sa^3\}$. Grupa G ma 4 reprezentacje nieprzywiedlne 1-wymiarowe pochodzące z reprezentacji $G/G' = D_2$ oraz jedną reprezentację nieprzywiedlną 2-wymiarową pochodzącą z reprezentacji naturalnej na $\mathbb{R}^2$: $a \mapsto \begin{pmatrix} \cos 2\pi/4 & -\sin 2\pi/4 \\ \sin 2\pi/4 & \cos 2\pi/4 \end{pmatrix}, s \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. A oto tabela charakterów:

	e	a	a^2	a^3	s	sa	sa^2	sa^3
χ_0	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
χ_2	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
χ_3	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
χ_4	2	0	-2	0	0	0	0	0

Literatura

[Ser88] Jean-Pierre Serre, *Reprezentacje liniowe grup skończonych*, PWN, 1988.