# Teoria grup I

Wykład 7

## 1 Elementarna teoria reprezentacji, cz. II

*Literatura dodatkowa:* [Ser88, Ada69]

**Założenia:** W tym rozdziale rozpatrujemy tylko skończone grupy $G$ i ich skończeniewymiarowe reprezentacje w przestrzeniach wektorowych nad $\mathbb{C}$.

**Charakter reprezentacji $\rho : G \to GL(V)$:** Jest to funkcja $\chi_\rho : G \to \mathbb{C}$ zadana wzorem $\chi_\rho(g) := \mathrm{Tr}(\rho(g))$. Przypomnijmy, że $\mathrm{Tr}\, A$ oznacza *ślad* operatora liniowego działającego w przestrzeni liniowej. Jeśli $[A] := A^i_j$ jest macierzą reprezentującą operator $A$ w jakiejkolwiek bazie, to $\mathrm{Tr}\, A$ obliczamy jako $\mathrm{Tr}[A] = A^i_i$ (kontynuujemy wykorzystanie konwencji Einsteina). Przy tym wynik nie zależy od wyboru bazy dzięki łatwo sprawdzalnej tożsamości $\mathrm{Tr}[A][B] = \mathrm{Tr}[B][A]$, z której w szczególności wynika, że $\mathrm{Tr}[B][A][B]^{-1} = \mathrm{Tr}[A]$ dla dowolnej macierzy niezdegenerowanej $[B]$.

**Niektóre własności charakteru $\chi_\rho$**

LEMAT *1. $\chi_\rho(e) = \dim V$;*

*2. $\chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}$ $\forall g \in G$;*

*3. $\chi_\rho(hgh^{-1}) = \chi_\rho(g)$ $\forall g, h \in G$.*

*Dowód: Ad. 1.* $\chi_\rho(e) = \mathrm{Tr}\,\mathrm{Id}_V = \dim V$.

*Ad. 2.* Z istnienia niezmienniczego iloczynu skalarnego na $V$ wynika, że wartości własne $\lambda_i$ operatora $\rho(g)$ spełniają warunek $\overline{\lambda_i}\lambda_i = 1$ (istotnie, jeśli $x_i$ jest odpowiednim wektorem własnym, to $(x_i|x_i) = (\rho(g)x_i|\rho(g)x_i) = (\lambda_i x_i|\lambda_i x_i) = \overline{\lambda_i}\lambda_i(x_i|x_i)$, skąd $\overline{\lambda_i}\lambda_i = 1$).

Niech $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, n = \dim V$, będą wartościami własnymi operatora $\rho(g)$ z uwzględnieniem krotności. Wtedy

$$\overline{\chi_\rho(g)} = \overline{\mathrm{Tr}\,\rho(g)} = \overline{\sum \lambda_i} = \sum \lambda_i^{-1} = \mathrm{Tr}(\rho(g)^{-1}) = \mathrm{Tr}(\rho(g^{-1})) = \chi_\rho(g^{-1}).$$

*Ad. 3.* $\chi_\rho(hgh^{-1}) = \mathrm{Tr}(\rho(h)\rho(g)\rho(h)^{-1}) = \mathrm{Tr}\,\rho(g) = \chi_\rho(g)$. $\square$

**Charakter a operacje nad reprezentacjami**

LEMAT *Niech $\rho_1 : G \to GL(V_1), \rho_2 : G \to GL(V_2)$ będą dwiema reprezentacjami. Wtedy*

*1. $\chi_{\rho_1^*} = \overline{\chi_{\rho_1}}$;*

2. $\chi_{\rho_1 \oplus \rho_2} = \chi_{\rho_1} + \chi_{\rho_2}$;

3. $\chi_{\rho_1 \otimes \rho_2} = \chi_{\rho_1} \cdot \chi_{\rho_2}$

*Dowód - ćwiczenie*

**Operatory splatające i równoważność reprezentacji:** Niech $\rho_1 : G \to GL(V_1), \rho_2 : G \to GL(V_2)$ będą dwiema reprezentacjami. Operatorem *splatającym* pomiędzy $\rho_1$ i $\rho_2$ nazywamy taki operator $F : V_1 \to V_2$, że następujący diagram jest przemienny dla dowolnego $g \in G$:

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\rho_1(g)"] \arrow[d, "F"] & V_1 \arrow[d, "F"] \\ V_2 \arrow[r, "\rho_2(g)"] & V_2. \end{tikzcd}$$

Przestrzeń operatorów splatających z $V_1$ do $V_2$ będziemy oznaczali $\mathrm{Hom}_G(V_1, V_2)$.

Mówimy, że reprezentacje $\rho_1$ i $\rho_2$ są *równoważne*[1], jeśli istnieje operator splatający będący izomorfizmem przestrzeni liniowych.

*Uwaga:* Reprezentacje równoważne mają jednakowe charaktery: $\rho_1(g) = F^{-1} \circ \rho_2(g) \circ F$, skąd $\mathrm{Tr}\, \rho_1(g) = \mathrm{Tr}\, \rho_2(g)$.

**Lemat Schura**

LEMAT *Niech $\rho_1 : G \to GL(V_1), \rho_2 : G \to GL(V_2)$ będą dwiema reprezentacjami* nieprzywiedlnymi *i niech $F : V_1 \to V_2$ będzie operatorem* splatającym. *Wtedy*

1. *Jeśli $\rho_1$ i $\rho_2$ nie są równoważne, to $F = 0$.*

2. *Jeśli $V_1 = V_2 =: V, \rho_1 = \rho_2$, to $F = \lambda\, \mathrm{Id}_V$ dla pewnego $\lambda \in \mathbb{C}$.*

*Dowód: Ad. 1.* Niech $W_1 := \ker F \subset V_1$. Wtedy $W_1$ jest podprzestrzenią niezmienniczą względem reprezentacji $\rho_1$. Istotnie, jeśli $w \in W_1$, to $F\rho_1(g)w = \rho_2(g)Fw = 0$, skąd $\rho_1(g)w \in W_1$. Z nieprzywiedlności $\rho_1$ wynika, że $W_1 = V_1$ (koniec dowodu) lub $W_1 = \{0\}$, czyli $F$ jest monomorfizmem.

Niech teraz $W_2 := \mathrm{im}\, F \subset V_2$. Okazuje się, że i $W_2$ jest podprzestrzenią niezmienniczą (względem $\rho_2$): $\rho_2(g)W_2 = \rho_2(g)FV_1 = F\rho_1(g)V_1 \subset W_2$. Znowu nieprzywiedlność implikuje, że $W_2 = \{0\}$ (koniec dowodu) lub $W_2 = V_2$. Ostatnia możliwość nie może zachodzić ze względu na to, że reprezentacje $\rho_1, \rho_2$ nie są równoważne.

*Ad. 2.* Niech $\lambda$ pewna wartość własna operatora $F$. Połóżmy $F' := F - \lambda\, \mathrm{Id}_V$. Wtedy $F'$ też jest operatorem splatającym (pomiędzy $\rho$ i $\rho$, gdzie $\rho := \rho_1 = \rho_2$). Argumenty przytoczone w pierwszej części dowodu pozwalają wywnioskować, że $F' = 0$ (czyli $F = \lambda\, \mathrm{Id}_V$ – koniec dowodu) lub $F'$ jest izomorfizmem. Ostatnia możliwość nie zachodzi, bo $F'$ ma nietrywialne jądro (zawierające wektor własny odpowiadający wartości własnej $\lambda$). $\square$

Wnioskiem z lematu Schura jest następujący fakt: $\dim \mathrm{Hom}_G(V_1, V_2) = 0$ w przypadku, gdy $\rho_1, \rho_2$ nie są równoważne, oraz $\dim \mathrm{Hom}_G(V, V) = 1$.

[1] Por. definicję z Wykładu 2

**Relacje ortogonalności dla charakterów:** Rozważmy przestrzeń $\mathrm{Fun}(G,\mathbb{C})$ funkcji na $G$ o wartościach zespolonych. Następujące parowanie

$$(\phi|\psi) := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\phi(g)}\psi(g) \quad \phi,\psi\in \mathrm{Fun}(G,\mathbb{C})$$

(tutaj $|G|$ oznacza rząd, czyli ilość elementów grupy $G$) spełnia wszystkie aksjomaty iloczynu skalarnego (*Ćwiczenie*).

Twierdzenie *Niech $\rho_1 : G\to GL(V_1), \rho_2 : G\to GL(V_2)$ będą dwiema reprezentacjami. Wtedy*

$$(\chi_{\rho_1}|\chi_{\rho_2}) = \dim \mathrm{Hom}_G(V_1,V_2).$$

*W szczególności, charaktery reprezentacji nieprzywiedlnych tworzą układ* ortonormalny.

Do dowodu tego twierdzenia będziemy potrzebowali następujący

Lemat *Niech $\rho : G\to GL(V)$ będzie reprezentacją. Połóżmy $P := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g) : V\to V$. Wtedy*

1. *Operator $P$ jest projektorem, czyli $P^2 = P$.*
2. $\mathrm{im}\, P = V^G := \{x\in V \mid \rho(g)x = x\ \forall g\in G\}$.

*Dowód: Ad. 1.* $P^2 = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)(\frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\rho(h)) = \frac{1}{|G|^2}\sum_{g\in G}\sum_{h\in G}\rho(g)\rho(h) = \frac{1}{|G|^2}\sum_{g\in G}\sum_{h\in G}\rho(gh) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}P = P$.
*Ad. 2.* Jeśli $x\in \mathrm{im}\, P$, to $x = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)y$ dla pewnego $y\in V$ oraz $\rho(h)x = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(hg)y = Py = x$, czyli $\mathrm{im}\, P\subset V^G$. Odwrotnie, jeśli $X\in V$ jest punktem stałym reprezentacji $\rho$, to $Px = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)x = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}x = x$, skąd $x\in \mathrm{im}\, P$. □

*Dowód twierdzenia:* Oznaczmy przez $\mathrm{Hom}(V_1,V_2)$ przestrzeń operatorów liniowych z $V_1$ w $V_2$ i zadajmy działanie grupy $G$ na tej przestrzeni wzorem $(\rho(g)F)(x) := \rho_2(g)(F(\rho_1(g^{-1})x)$ (*Ćwiczenie:* sprawdzić, że w ten sposób otrzymujemy reprezentację grupy $G$ w przestrzeni $\mathrm{Hom}(V_1,V_2)$). Element $F\in \mathrm{Hom}(V_1,V_2)$ jest punktem stałym tego działania, jeśli i tylko jeśli dla każdego $g\in G$ natępujący diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[d, "F"] & V_1 \arrow[l, "\rho_1(g^{-1})"'] \arrow[d, "F"] \\ V_2 \arrow[r, "\rho_2(g)"] & V_2, \end{tikzcd}$$

czyli $F$ jest operatorem splatającym. Innymi słowy $\mathrm{Hom}(V_1,V_2)^G = \mathrm{Hom}_G(V_1,V_2)$.

Rozważmy odwzorowanie $\alpha : V_1^*\otimes V_2\to \mathrm{Hom}(V_1,V_2)$ zadane wzorem $(\alpha(\gamma\otimes v_2))v_1 := \gamma(v_1)v_2, \gamma\in V_1^*, v_i\in V_i$. Jest to izomorfizm przestrzeni liniowych, przy czym działanie $\rho$ przechodzi na następujące: $\tilde\rho(g)(\gamma\otimes v_2) := \rho_1^*(g)\gamma\otimes\rho_2(g)v_2$, gdzie $(\rho_1^*(g)\gamma)(v_1) = \gamma(\rho_1(g^{-1})v_1)$ (działanie dualne do $\rho_1$).

Reprezentacje $\rho$ i $\tilde\rho$ są równoważne, mamy więc $\chi_\rho = \chi_{\tilde\rho}$. Ostatecznie mamy

$$(\chi_1|\chi_2) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi_1(g)}\chi_2(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{\tilde\rho} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_\rho = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mathrm{Tr}\,\rho(g) = \mathrm{Tr}\, P = \dim\mathrm{im}\, P = \dim\mathrm{Hom}_G(V_1,V_2).$$

Tutaj skorzystaliśmy z faktu, że ślad projektora jest równy wymiarowi jego obrazu (istotnie, każdy rzut jest operatorem diagonalizowalnym z wartościami własnymi równymi $1, 0$, przy czym wymiar obrazu jest równy krotności wartości własnej 1). □

## Literatura


[Ada69] J. Frank Adams, *Lectures on Lie groups*, Benjamin, 1969.

[Ser88] Jean-Pierre Serre, *Reprezentacje liniowe grup skończonych*, PWN, 1988.