Teoria grup I

Wykład 6

1 Elementarna teoria reprezentacji, cz. I

Literatura dodatkowa: [Ser88]

Reprezentacja grupy G w przestrzeni wektorowej V nad ciałem $\mathbb{K}$: jest to lewe działanie $\nu : G \times V \to V$ grupy G na V poprzez transformacje liniowe. *Definicja równoważna:* Reprezentacją G w V nazywamy homomorfizm $\rho : G \to GL(V)$ z grupy G w grupę odwracalnych liniowych (nad $\mathbb{K}$) przekształceń przestrzeni V.

Ćwiczenie 1: Sprawdzić równoważność definicji, czyli pokazać, że 1) odwzorowanie $\rho_\nu(g) = \nu(g, \cdot) : V \to V$ należy do $GL(V)$; 2) odwzorowanie $g \mapsto \rho_\nu(g) : G \to GL(V)$ jest homomorfizmem; 3) odwrotnie, jeśli $\rho : G \to GL(V)$ pewien homomorfizm, to $\nu_\rho(g, v) := \rho(g)v$ jest działaniem liniowym.

Ćwiczenie 2: Sprawdzić, że w sposób podobny każde *prawe* działanie liniowe $\nu : V \times G \to V$ (będziemy takie działania nazywać *antyreprezentacjami*) generuje pewien *antyhomomorfizm* $\rho : G \to GL(V)$ (czyli $\rho(g_1g_2) = \rho(g_2)\rho(g_1)$).

Ćwiczenie 3: Udowodnić, że każde prawe działanie $x \mapsto xg$ grupy G na zbiorze X zadaje lewe działanie według wzoru $gx := xg^{-1}$ i na odwrót.

Przykład podstawowy: Niech $\nu : X \times G \to X$ będzie prawym działaniem grupy G na dowolnym zbiorze X i niech $V := \mathrm{Fun}(X, \mathbb{K})$ będzie przestrzenią funkcji na X o wartościach w $\mathbb{K}$. Wtedy wzór $(gf)(x) := f(xg), g \in G, x \in X, f \in V$, zadaje reprezentację G w V. Istotnie, przekształcenie $f \mapsto gf$ jest liniowe oraz $((g_1g_2)f)(x) = f(x(g_1g_2)) = f((xg_1)g_2) = (g_2f)(xg_1) = (g_1(g_2f))(x)$.

W ten oto sposób możemy sprowadzić badanie *dowolnych* działań do badania działań *liniowych*.

Uwaga: Jest kilka wersji powyższej konstrukcji. Na przykład, każde lewe działanie G na X zadaje antyreprezentację $(fg)(x) := f(gx)$, bądź, ze względu na powyższe Ćwiczenie, reprezentację $(gf)(x) := f(g^{-1}x)$.

Podprzestrzeń niezmiennicza $W \subset V$ reprezentacji $\nu : G \times V \to V$: Jest to podprzestrzeń W o własności $GW \subset W$ (równoważnie, $\rho(g)W \subset W\ \forall g \in G$).

W podprzestrzeni niezmienniczej $W \subset V$ mamy nową reprezentacje grupy G. Jest nią $\nu|_{G\times W} : G \times W \to W$ (nazywamy ją podreprezentacją reprezentacji ν).

Przykład: Niech G będzie grupą obrotów w $\mathbb{R}^3$ mających wspólną oś. Wtedy właśnie ta oś jest podprzestrzenią niezmienniczą.

Reprezentacja nieprzywiedlna: Jest to reprezentacja nie posiadająca nietrywialnych (różnych od $\{0\}$ i V) podprzestrzeni niezmienniczych.

Przykład: Niech $G = SO(\mathbb{R}^2)$ z naturalnym działaniem na $\mathbb{R}^2$. Jest to reprezentacja nieprzywiedlna, bo każda nietrywialna podprzestrzeń jest prostą przechodzącą przez zero, a żadna z takich prostych nie zachowuje się przez grupę obrotów.

Zauważmy, że grupa G jest izomorficzna z grupą z poprzedniego przykładu. W ten sposób mamy dwie *nierównoważne* reprezentacje grupy $SO(\mathbb{R}^2)$.

Reprezentacje nieprzywiedlne będą „cegiełkami", które będziemy próbować „sklasyfikować" i z których będziemy budować inne reprezentacje.

Reprezentacja w pełni przywiedlna: Jest to reprezentacja G o tej własności, że dla każdej podprzestrzeni $W \subset V$ niezmienniczej istnieje *niezmiennicza* podprzestrzeń *dopełniająca* $Z \subset V$ (czyli taka, że $W \oplus Z = V$).

Przykład: Niech grupa $G := \{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ działa w sposób naturalny na $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ ay \end{bmatrix}.$$

Wtedy $W := \{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\}$ jest podprzestrenią niezmienniczą tego działania, dla której *nie istnieje* dopełniającej podprzestrzeni niezmienniczej. *Dlaczego?*

Rozkład skończeniewymiarowej reprezentacji $\nu : G \times V \to V$ w pełni przywiedlnej na nieprzywiedlne: Algorytm: Jeśli V jest nieprzywiedlna, koniec. Jeśli nie, istnieje podprzestrzeń niezmiennicza $V_1 \subset V$ i dopełniająca podprzestrzeń niezmiennicza V_2. Jeśli obie są nieprzywiedlne, koniec. Jeśli nie, stosujemy powyższy algorytm do V_1 oraz V_2.

Iterując powyższe działania, na końcu (tutaj przydaje się skończeniewymiarowość) otrzymamy rozkład $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ przestrzeni V na nieprzywiedlne podprzestrzenie niezmiennicze.

Zupełna przywiedlność reprezentacji grup skończonych

Twierdzenie *Niech G będzie grupą* skończoną*, a V przestrzenią skończeniewymiarową nad ciałem $\mathbb{K}$ równym $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$. Wtedy każda reprezentacja G w V jest w pełni przywiedlna.*

Najpierw udowodnimy następujący

Lemat *W założeniach powyższego twierdzenia, na V istnieje* niezmienniczy *istnieje iloczyn skalarny $(|)$ (dwuliniowy w przypadku rzeczywistym i półtoraliniowy w zespolonym). Niezmienniczość oznacza*

$$(gx|gy) = (x|y) \ \forall g \in G, x, y \in V.$$

Dowód: Niech $\langle | \rangle$ dowolny iloczyn skalarny. Określmy

$$(x|y) := \sum_{h \in G} \langle hx | hy \rangle.$$

Niezmienniczość $(|)$ jest oczywista: $(gx|gy) = \sum_{h \in G} \langle hgx | hgy \rangle = \sum_{h \in G} \langle hx | hy \rangle = (x|y)$.

Sprawdzamy własności iloczynu skalarnego. 1) dwuliniowość (półtoraliniowość) wynika z tej że własności $\langle|\rangle$ oraz z liniowości odwzorowania $x \mapsto gx$; 2) symetria, $(x|y) = (y|x)$, i nieujemna określoność, $(x|x) \geq 0$, – z tych że własności $\langle|\rangle$; 3) $(|)$ jest niezdegenerowany: $(x|x) = \sum_{h\in G}\langle hx|hx\rangle = 0$ implikuje (na mocy dodatniej określoności $\langle|\rangle$) następującą własność:

$$\langle hx|hx\rangle = 0 \ \forall h \in G,$$

w szczególności $\langle x|x\rangle = 0$ i $x = 0$. $\square$

Teraz jesteśmy w stanie udowodnić twierdzenie. Niech $W \subset V$ będzie podprzestrzenią niezmienniczą. Wtedy dopełnienie ortogonalne $W^\perp$ względem $(|)$ tez będzie niezmiennicze. Istotnie, jeśli $w \in W^\perp$, to $(w|v) = 0$ dla każdego $v \in W$. Ale z niezmienniczości $(|)$ również $(gw|gv) = 0$ dla każdego $v \in W$. Ponieważ gv przebiega całe W, gdy v przebiega W, wnioskujemy, że $gw \in W^\perp$, czyli $W^\perp$ jest podprzestrzenią niezmienniczą. $\square$

Uwaga: Powyższy lemat pokazuje, że odwzorowania $x \mapsto gx, g \in G$ w bazie ortonormalnej przestrzeni V reprezentują się przez macierze ortogonalne (w przypadku $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) lub unitarne (w przypadku $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). W szczególności, otrzymaliśmy dowód lematu, z którego korzystaliśmy w dowodzie twierdzenia Zassenhausa.

Niektóre operacje na reprezentacjach

Reprezentacja dualna do reprezentacji $\rho : G \to GL(V)$: jest to reprezentacja $\rho^* : G \to GL(V^*)$ określona przez $\rho^*(g) := (\rho(g^{-1}))^*$. Można też określić $\rho^*(g) := (\rho(g))^*$, ale to będzie antyreprezentacja.

Suma prosta reprezentacji $\rho_1 : G \to GL(V_1), \rho_2 : G \to GL(V_2)$: Jest to reprezentacja ρ grupy G w przestrzeni $V_1 \oplus V_2$ zadana przez $\rho(g) := (\rho_1(g), \rho_2(g))$. Jeśli $\rho_1(g), \rho_2(g)$ są reprezentowane przez macierze z $GL(n, \mathbb{K}), GL(m, \mathbb{K})$ odpowiednio, to $\rho(g)$ jest reprezentowana przez macierz

$$\begin{bmatrix} \rho_1(g) & 0 \\ 0 & \rho_2(g) \end{bmatrix}.$$

Iloczyn tensorowy reprezentacji $\rho_1 : G \to GL(V_1), \rho_2 : G \to GL(V_2)$: Jest to reprezentacja ρ grupy G w przestrzeni $V_1 \otimes V_2$ zadana przez $\rho(g) := \rho_1(g) \otimes \rho_2(g)$. Jeśli $\rho_1(g), \rho_2(g)$ są reprezentowane przez macierze $[\rho_1(g)] \in GL(n, \mathbb{K}), [\rho_2(g)] \in GL(m, \mathbb{K})$, to $\rho(g)$ jest reprezentowana przez macierz będącą iloczynem tensorowym tych macierzy.

Przypomnijmy, że, jeśli operator $A \in GL(V_1)$ jest reprezentowany przez macierz $[A] := A^i_j$ w bazie $r_1, \ldots, r_n$, czyli $Ar_j = A^i_j r_i$ (stosujemy konwencję Einsteina: sumujemy po jednakowym indeksach), a operator $B \in GL(V_2)$ jest reprezentowany przez macierz $[B] := B^k_l$ w bazie $s_1, \ldots, s_m$ (czyli $Bs_l = B^k_l l s_k$), to $A \otimes B(e_j \otimes e_l) := Ar_j \otimes Bs_l = A^i_j B^k_l r_i \otimes s_k$.

Innymi słowy, w bazie $r_i \otimes s_k, i = 1, \ldots, n, k \in 1, \ldots, m$, operator $A \otimes B$ jest reprezentowany przez macierz $A^i_j B^k_l$.

Literatura

[Ser88] Jean-Pierre Serre, *Reprezentacje liniowe grup skończonych*, PWN, 1988.