

# Teoria grup I

## Wykład 5

### 1 Elementy teorii grup krystalograficznych

Literatura dodatkowa:[Szc]<sup>1</sup>

#### Dygresja o topologii

*Przestrzeń topologiczna:* Zbiór  $X$  wraz z rodziną podzbiorów  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  nazywanych *otwartymi* o własnościach:

1. zbiory  $\emptyset$  oraz  $X$  są otwarte;
2. zbiór  $\bigcup_{\alpha \in B} U_\alpha$  jest otwarty dla dowolnego podzbioru  $B \subset A$
3. przecięcie skończonej liczby zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.

Rodzinę  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  nazywamy *topologią* na  $X$ .

*Przykład 1:* Rodzina zbiorów otwartych w dowolnej przestrzeni metrycznej.

*Przykład 2:* Topologia *dyskretna* składa się ze wszystkich podzbiorów zbioru  $X$ .

*Przykład 3:* Niech  $X$  przestrzeń topologiczna,  $Y \subset X$  pewien podzbiór. Topologia *indukowana* na  $Y$  składa się ze wszystkich przecięć zbiorów otwartych w  $X$  z podzbiorem  $Y$ .

*Odwzorowanie ciągłe*  $\phi : X \rightarrow Y$  *między przestrzeniami topologicznymi:* jest to odwzorowanie takie, że przeciwobraz dowolnego zbioru otwartego (w  $Y$ ) jest otwarty (w  $X$ ).

*Podzbiór zwarty*  $K \subset X$ : Jest to podzbiór o tej własności, że z dowolnego pokrycia  $\bigcup_{\alpha \in B} U_\alpha \supset K$  zbiorami *otwartymi* można wybrać podpokrycie skończone.

*Topologia ilorazowa:* Niech  $X$  będzie przestrzenią przestrzeń topologiczną, a  $\mathcal{R} \subset X \times X$  relacją równoważności. Zbiór  $X/\mathcal{R} = X/\sim$  klas równoważności posiada naturalną topologię zwaną *ilorazową*. Jest to najmocniejsza (czyli „najbogatsza”) topologia na  $X/R$ , w której rzut naturalny  $\pi : X \rightarrow X/\mathcal{R}$  jest ciągły. Zbiór  $U \subset X/R$  jest w niej otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy  $\pi^{-1}(U)$  jest otwarty w  $X$ .

*Przykład:* Niech  $X = \mathbb{R}^2$  i niech  $(a, b) \sim (c, d) \stackrel{def}{\iff} a = c$ . Wtedy  $X/$  naturalnie utożsamia się z  $\mathbb{R}$ , a topologia ilorazowa pokrywa się ze standardową topologią na  $\mathbb{R}$ .

*Uwaga:* Jeśli grupa  $G$  działa na zbiorze  $X$ , to relacja  $a \sim b \stackrel{def}{\iff} \exists g \in G \ a = gb$  jest relacją równoważności (*Ćwiczenie: sprawdzić*). Zbiór  $X/\sim$  (oznaczany przez  $X/G$ ) jest zbiorem orbit działania  $G$  na  $X$ .

<sup>1</sup>Zob. także <http://pl.wikipedia.org/wiki/Krystalografia>, [http://en.wikipedia.org/wiki/Wallpaper\\_group](http://en.wikipedia.org/wiki/Wallpaper_group)

*Przykład:* Niech  $X = \mathbb{R}^2$  i niech grupa  $SO(2, \mathbb{R})$  działa w sposób naturalny na  $X$ . Wtedy przestrzeń orbit  $X/G$  z topologią ilorazową jest promieniem  $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ . Jeśli  $C_n \subset SO(2, \mathbb{R})$  jest grupą cykliczną generowaną przez obrót o kąt  $2\pi/n$ , to  $X/C_n$  jest stożkiem.

**Grupa euklidesowa:** Niech  $\mathbb{R}^n$  będzie wyposażone w standardowy iloczyn skalarny  $(\cdot | \cdot)$ . Odwzorowanie  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  o własności  $(\phi(x) | \phi(y)) = (x | y) \forall x, y \in \mathbb{R}^n$  nazywamy izometrią. *Ćwiczenie:* sprawdzić, że izometrie tworzą grupę względem złożenia odwzorowań.

LEMAT *Każda izometria  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  jest superpozycją  $t_a \circ A$  przekształcenia ortogonalnego  $A \in O(\mathbb{R}^n)$  i translacji  $t_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto x + a, a \in \mathbb{R}^n$ .*

*Dowód: ćwiczenie.*

Grupę izometrii nazywamy grupą euklidesową i oznaczamy  $E(\mathbb{R}^n)$ .

LEMAT *Grupa  $E(\mathbb{R}^n)$  jest izomorficzna z iloczynem półprostym  $O(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n =: E(n, \mathbb{R})$ .*

*Dowód:* Niech  $[A]$  będzie macierzą odwzorowania  $A$  w dowolnej bazie ortonormalnej, a  $[a]$  kolumną współrzędnych elementu  $a$ . Określmy odwzorowanie  $t_a \circ A \mapsto ([A], [a]) : E(\mathbb{R}^n) \rightarrow O(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ . Dla  $x \in \mathbb{R}^n$  mamy  $(t_b \circ B) \circ (t_a \circ A)x = (t_b \circ B)(Ax + a) = BAx + Ba + b$ , więc złożenie izometrii indukuje następujące działanie grupowe na  $O(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ :  $([B], [b])([A], [a]) := ([B][A], [B][a] + [b])$ .  $\square$

Poniżej pod grupą euklidesową będziemy rozumieć grupę  $E(n, \mathbb{R})$ .

**Kozwarta grupa  $\Gamma \subset E(n, \mathbb{R})$ :** Jest to podgrupa grupy euklidesowej taka, że przestrzeń orbit  $\mathbb{R}^n/\Gamma$  jest zwarta.

*Przykład:* Podgrupa  $\Gamma = \{t_a \mid a \in \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n\} \cong \mathbb{Z}^n$  translacji całkowitoliczbowych jest kozwarta. Przestrzeń orbit  $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$  jest torusem  $n$ -wymiarowym.

**Obszar fundamentalny:** Niech  $\Gamma \subset E(\mathbb{R}^n)$  będzie dowolną podgrupą. Podzbiór  $F \subset \mathbb{R}^n$  nazywamy obszarem fundamentalnym działania  $\Gamma$  na  $\mathbb{R}^n$ , jeśli

$$\bigcup_{g \in \Gamma} gF = \mathbb{R}^n$$

oraz  $g \operatorname{int}(F) \cap g' \operatorname{int}(F) = \emptyset$  dla  $g \neq g'$ . Tutaj  $\operatorname{int}(F)$  jest zbiorem punktów wewnętrznych zbioru  $F$ , czyli takich punktów  $p \in F$ , które posiadają otoczenie otwarte (czyli zbiór otwarty  $U \ni p$ ) zawarte w  $F$ .

*Przykład:* Kwadrat domknięty o boku 1 jest obszarem fundamentalnym dla działania grupy  $\Gamma = \mathbb{Z}^2$ . Obszarem fundamentalnym dla działania skończonej grupy obrotów  $C_n$  jest domknięty wycinek nieograniczony o kącie  $2\pi/n$ .

**Krystalograficzna grupa  $\Gamma$  wymiaru  $n$ :** Jest to dyskretna<sup>2</sup> i kozwarta podgrupa grupy Euklidesowej  $E(n, \mathbb{R})$ .

*Przykład:*  $\Gamma = \mathbb{Z}^n$ .

---

<sup>2</sup>Zob. definicję podgrupy dyskretnej w przypisie na końcu Wykładu 2. Równoważna definicja: podzbiorem dyskretnym w przestrzeni topologicznej  $X$  nazywamy taki podzbiór  $Y \subset X$ , że topologia indukowana na  $Y$  jest dyskretną.

TWIERDZENIE ( Bieberbacha)

1. Jeżeli  $\Gamma \subset E(n, \mathbb{R})$  jest grupą krystalograficzną, to jej zbiór translacji  $\Gamma_t := \Gamma \cap (I \times \mathbb{R}^n)$  jest normalną podgrupą abelową skończonego indeksu (ostatnie oznacza, że grupa ilorazowa  $\Gamma/\Gamma_t$  jest skończona). Ponadto,  $\Gamma_t$  jest maksymalną podgrupą abelową w  $\Gamma$  (czyli nie zawiera się w żadnej większej podgrupie abelowej) i jest izomorficzna z  $\mathbb{Z}^n$ .
2. Dla każdego  $n$  istnieje skończona liczba klas izomorfizmu grup krystalograficznych wymiaru  $n$ .
3. Dwie grupy krystalograficzne wymiaru  $n$  są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy są sprzężone w grupie  $A(n, \mathbb{R})$  afinicznych przekształceń  $\mathbb{R}^n$ .

(Bez dowodu.)

Z punktu 1 wynika, że grupy krystalograficzne posiadają zwarte obszary fundamentalne. To stanowi podstawę ich zastosowań w krystalografii: ciało stałe jest kryształem (w odróżnieniu od „kwazikryształów” i ciał amorficznych), jeśli jego struktura atomowa jest okresowym powtórzeniem ograniczonego „kawałka” tej struktury.

Przykład: Grupa  $\mathbb{Z}^1 := \{t_{(n,0)} \mid n \in \mathbb{Z}\} \subset E(2, \mathbb{R})$  nie ma zwartego obszaru fundamentalnego.

TWIERDZENIE (Zassenhausa) Grupa  $\Gamma$  jest izomorficzna z grupą krystalograficzną wymiaru  $n$  wtedy i tylko wtedy, gdy ma normalną podgrupę abelową skończonego indeksu izomorficzną z  $\mathbb{Z}^n$ , będącą maksymalną podgrupą abelową.

Dowód: Jedną z implikacji jest punktem 1 twierdzenia Bieberbacha.

Żeby udowodnić drugą rozważmy następujący diagram przemienny:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \{*\} & \longrightarrow & \mathbb{Z}^n & \longrightarrow & \Gamma & \longrightarrow & G & \longrightarrow & \{*\} \\
 & & \downarrow \iota_1 & & \downarrow \iota_2 & & \downarrow \parallel & & \\
 \{*\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \tilde{\Gamma} & \longrightarrow & G & \longrightarrow & \{*\} \\
 & & \downarrow \parallel & & \downarrow \iota_4 & & \downarrow \iota_3 & & \\
 \{*\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & A(n, \mathbb{R}) & \longrightarrow & GL(n, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \{*\},
 \end{array}$$

którego składniki określimy poniżej.

W pierwszym wierszu  $G := \Gamma/\mathbb{Z}^n$ , czyli mamy rozszerzenie odpowiadające włożeniu podgrupy normalnej  $\mathbb{Z}^n$  w grupę  $\Gamma$  i rzutowi na odpowiednią grupę ilorazową. Grupę  $\tilde{\Gamma}$  określimy jako iloczyn półprosty  $G \ltimes \mathbb{R}^n$ , a odwzorowanie  $\iota_1$ , jako włożenie standardowe. Przypomnijmy sobie, że pierwszy wiersz jednoznacznie określa homomorfizm grup  $f : G \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}^n)$  (wybieramy cięcie  $s : G \rightarrow \Gamma$  i określamy  $f(g)$  jako  $A_{s(g)}|_{\mathbb{Z}^n}$ ).

Przypomnijmy również, że rozszerzenie z pierwszego wiersza zadaje kocykl  $c \in Z^2(G, \mathbb{Z}^n)$  określony z dokładnością do dodawania kobrzegów. Żeby określić odwzorowanie  $\iota_2$  skorzystamy z faktu, że  $H^2(G, \mathbb{R}^n) = 0$ , który przyjmiemy bez dowodu. Fakt ten mówi, że każdy 2-kocykl na  $G$  o wartościach w  $\mathbb{R}^n$  jest kobrzegiem. W szczególności istnieje  $q \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$  taki, że  $dq = c$  (korzystamy z tego, że każdy kocykl na  $G$  o wartościach w  $\mathbb{Z}^n$  może być uważany za kocykl na  $G$  o wartościach w

$\mathbb{R}^n$ ). Z ogólnej teorii wiemy, że  $q$  określa pewną bijekcję  $\Gamma \rightarrow \Gamma$ , zadającą izomorfizm  $\Gamma$  z iloczynem półprostym. Nazwijmy ją  $\iota_2$ .

Żeby określić odwzorowanie  $\iota_3$  zauważmy, że maksymalność podgrupy abelowej  $\mathbb{Z}^n$  implikuje monomorficzność odwzorowania  $f$ . Istotnie, jeśli  $g \in G$  jest nietrywialnym elementem należącym do jądra  $f$ , to  $A_{s(g)}$  zostawia każdy element z  $\mathbb{Z}^n$  na miejscu, czyli  $s(g)$  komutuje z  $\mathbb{Z}^n$ . Wtedy podgrupa generowana przez  $\mathbb{Z}^n$  i  $s(g)$  jest abelowa. Z drugiej strony  $s(g) \notin \mathbb{Z}^n$  (bo  $s(g)$  leży w nietrywialnej warstwie), co przeczy maksymalności  $\mathbb{Z}^n$ . Określmy  $\iota_3$  jako złożenie odwzorowań  $G \xrightarrow{f} \text{Aut}(\mathbb{Z}^n) \cong GL(n, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\iota} GL(n, \mathbb{R})$ . Tutaj  $\iota$  jest włożeniem standardowym, a izomorfizm grupy  $\text{Aut}(\mathbb{Z}^n)$  z grupą  $GL(n, \mathbb{Z})$  (takich macierzy odwracalnych  $X$ , że  $X$  i  $X^{-1}$  mają współczynniki całkowite) buduje się w sposób następujący. Niech  $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$  będą elementami bazy standardowej<sup>3</sup>. Wtedy każdy  $\phi \in \text{Aut}(\mathbb{Z}^n)$  reprezentuje się w sposób jednoznaczny macierzą o wyrazach całkowitych, której kolumny są współczynnikami rozkładu  $\phi(e_j)$  po tej że bazie. Macierz odwrotna będzie miała wyrazy całkowite, ponieważ odwzorowanie  $\phi^{-1}$  rozumiane jako odwzorowanie  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  zachowuje kratę  $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ , w szczególności  $\phi^{-1}(e_j)$  muszą mieć współczynniki całkowite rozkładu po bazie standardowej.

Teraz określimy odwzorowanie  $\iota_4$ . Grupa  $A(n, \mathbb{R})$  afinicznych przekształceń przestrzeni  $\mathbb{R}^n$  jest iloczynem półprostym  $GL(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$  (dowód jest analogiczny jak w przypadku grupy euklidesowej). Odwzorowanie  $\iota_4$  jest naturalnym włożeniem jednego iloczynu półprostego ( $G \times_{\iota_3} \mathbb{R}^n$ ) w drugi ( $GL(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ ).

Ponieważ wszystkie odwzorowania  $\iota_j$  są monomorfizmami, mamy włożenie grupy  $\Gamma$  w grupę  $A(n, \mathbb{R})$ . Zostało pokazać, że tak naprawdę  $G$  leży w  $O(n, \mathbb{R}) \subset GL(n, \mathbb{R})$ . To wynika z następującego lematu, który udowodnimy w teorii reprezentacji.

**LEMAT** *Każda skończona grupa macierzy  $n \times n$  o wyrazach rzeczywistych jest sprzężona do grupy macierzy ortogonalnych.*

Z lematu tego wynika, że  $\Gamma$  jest izomorficzna z podgrupą w  $E(n, \mathbb{R})$ . Dyskretność tej podgrupy wynika z tego, że jako zbiór jest ona iloczynem prostym zbioru skończonego  $G$  oraz podzbioru dyskretnego  $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ . Kozwartość, z kolei, wynika z tego, że  $\Gamma_t \cong \mathbb{Z}^n$  (tę implikację przyjmujemy bez dowodu).  $\square$

**Algorytm Zassenhausa klasyfikacji grup krystalograficznych:** Powyższy dowód sugeruje pewną metodę klasyfikacji grup krystalograficznych. Składa się ona z następujących kroków:

1. Opisać wszystkie skończone podgrupy  $G$  grupy  $GL(n, \mathbb{Z})$  (z dokładnością do izomorfizmu).
2. Opisać wszystkie włożenia  $\iota : G \rightarrow GL(n, \mathbb{Z}) \cong \text{Aut}(\mathbb{Z}^n)$ , czyli działania *wierne* (z dokładnością do równoważności).
3. Obliczyć  $H^2(G, \mathbb{Z}^n)$  dla wszystkich grup z p. 1 i dla wszystkich działań z p. 2.
4. Określić które z rozszerzeń otrzymanych za pomocą odpowiednich kocykli są równoważne.

**Ilustracja algorytmu Zassenhausa dla grup „tapetowych”** Grupami tapetowymi nazywamy grupy krystalograficzne wymiaru  $n = 2$ . Następujący lemat opisuje wynik 1-go i 2-go kroku algorytmu.

---

<sup>3</sup>Zauważmy, że każdy inny wybór bazy  $Ae_1, \dots, Ae_n$ , gdzie  $A \in GL(n, \mathbb{Z})$ , zadaje inny izomorfizm  $\text{Aut}(\mathbb{Z}^n) \cong GL(n, \mathbb{Z})$ .

LEMAT (Ograniczenie krystalograficzne). Niech  $G \subset GL(2, \mathbb{Z})$  będzie podgrupą skończoną. Wtedy  $G$  jest izomorficzna z jedną z następujących grup

$$\{I\}, C_2, C_3, C_4, C_6, D_2, D_3, D_4, D_6.$$

Przy tym grupa  $C_2$  ma 3 nierównoważne włożenia, a grupy  $D_2$  i  $D_3$  ma ich 2.

Lemat ten przyjmujemy bez dowodu, ale spróbujmy zrobić następujące Ćwiczenie: znaleźć (choćby jedno) włożenie grup  $C_3, C_6$  w  $GL(2, \mathbb{Z})$ .

Trzy nierównoważne włożenia grupy  $C_2 = \{e, v\}$  w  $GL(2, \mathbb{Z})$  zadają się wzorami  $v \mapsto M_i, i = 1, 2, 3$ , gdzie  $M_1 := \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, M_2 := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, M_3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  odpowiednio.

**Zadanie na ćwiczenia:** Obliczyć grupę  $H^2(C_2, \mathbb{Z}^2)$  dla trzech powyższych działań  $C_2$  na  $\mathbb{Z}^2$  i zbudować odpowiednie grupy tapetowe.

*Rozwiązanie:* Rozważmy warunek kocyklu  $c \in Z^2(G, G_1)$ :

$$f_g c(h, j) - c(gh, j) + c(g, hj) - c(g, h) = 0, \quad g, h, j \in G.$$

Podstawiając  $g, e, e$  lub  $e, e, j$  zamiast  $g, h, j$  otrzymujemy odpowiednio

$$f_g c(e, e) = c(g, e), \quad c(e, j) = c(e, e),$$

a podstawiając  $g, g, e$  lub  $e, g, g$  otrzymujemy

$$f_g c(g, e) = c(e, e), \quad f_g c(g, g) - c(e, g) + c(g, e) - c(g, g) = 0.$$

W szczególności z pierwszych dwóch wzorów wynika, że do tego, żeby określić 2-kocykl  $c$  na grupie dwuelementowej  $G = C_2 = \{e, v\}$  wystarczy określić  $c(e, e)$  oraz  $c(v, v)$ . Ponadto, każdy 1-kołańcuch  $q \in C^1(C_2, G_1)$  określony jest przez zadanie  $q(e)$  oraz  $q(v)$ . Mamy też wzory

$$dq(e, e) = q(e) - q(e) + q(e) = q(e), \quad dq(g, g) = f_g q(g) - q(e) + q(g).$$

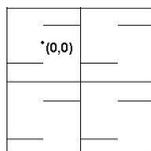
Niech  $G := C_2, G_1 := \mathbb{Z}^2, c(e, e) := (a, b), c(v, v) := (r, s), q(e) := (m, n), q(v) := (k, l), a, b, r, s, m, n, k, l \in \mathbb{Z}$ .

*Przypadek 1:*  $f : C_2 \rightarrow GL(2, \mathbb{Z}), f_v := M_1$ . Wtedy warunek kocyklu implikuje więź  $(-r, -s) - (a, b) + (-a, -b) - (r, s) = 0$ , skąd  $r = -a, s = -b$ . Zbadajmy, czy kocykl  $c$  może być kobrzegiem  $dq$ :

$$(a, b) = c(e, e) = dq(e, e) = q(e) = (m, n), \quad (r, s) = c(v, v) = dq(v, v) = (-k, -l) - (m, n) + (k, l) = (-m, -n).$$

Czyli, jeśli określimy  $q(e) := (a, b)$ , a  $q(v)$  dowolnie, będziemy mieli  $c = dq$ . Innymi słowy  $H^2(C_2, \mathbb{Z}^2) = 0$  w tym przypadku.

Odpowiednia grupa tapetowa naprzykład może być generowana przez elementy  $t_{(0,0)} \circ M_1, t_{(1,0)}, t_{(0,1)}$  i być grupą symetrii poniższej „tapety”

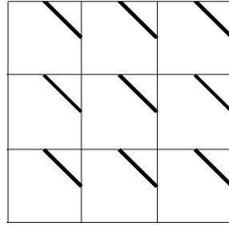


Przypadek 2:  $f : C_2 \rightarrow GL(2, \mathbb{Z}), f_v := M_2$ . Wtedy  $(s, r) - (a, b) + (b, a) - (r, s) = 0$ , skąd  $a + r = b + s$ . Czy kocykl  $c$  może być kobrżegiem  $dq$ ?

$$(a, b) = c(e, e) = dq(e, e) = q(e) = (m, n), (r, s) = c(v, v) = dq(v, v) = (l, k) - (m, n) + (k, l) = (k+l-m, k+l-n).$$

Określmy  $q(e)$  wzorem  $q(e) := (a, b)$ , a  $q(v) := (k, l)$  tak, żeby  $k + l = a + r = b + s$ . Wtedy  $c = dq$ , czyli  $H^2(C_2, \mathbb{Z}^2) = 0$  i w tym przypadku.

Przykładowa grupa tapetowa jest generowana przez elementy  $M_2, t_{(1,0)}$  i jest grupą symetrii następującej „tapety”



Przypadek 3:  $f : C_2 \rightarrow GL(2, \mathbb{Z}), f_v := M_3$ . Wtedy  $(r, -s) - (a, b) + (a, -b) - (r, s) = 0$ , skąd  $s = -b$ . Czy kocykl  $c$  może być kobrżegiem  $dq$ ?

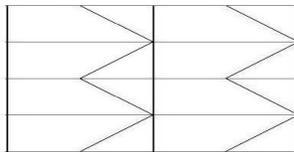
$$(a, b) = c(e, e) = dq(e, e) = q(e) = (m, n), (r, -b) = c(v, v) = dq(v, v) = (k, -l) - (m, n) + (k, l) = (2k - m, -n).$$

Spróbujmy określić  $q$  wzorami  $q(e) := (a, b)$ ,  $q(v) := (k, l)$  tak, żeby  $2k - a = r$ . Widać, że  $a + r$  musi być liczbą *parzystą*. Stąd na przykład kocykl  $c$  zadany przez  $c(e, e) = (0, 1), c(v, v) = (1, -1)$  jest kohomologicznie nietrywialny, czyli nie istnieje  $q \in C^1(C_2, \mathbb{Z}^2)$  takiego, że  $dq = c$ !

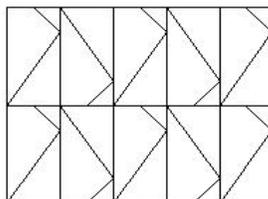
Łatwo też zrozumieć, że każdy kocykl  $c \in Z^1(C_2, \mathbb{Z}^2)$  rozumiany jako element  $Z^1(C_2, \mathbb{R}^2)$  jest kohomologicznie trywialny (por. dowód twierdzenia Zassenhausa), bo  $k$  obliczamy ze wzoru  $k = (r + a)/2$ .

Obliczmy grupę  $H^2(C_2, \mathbb{Z}^2)$  (czyli ile jest tych kocykli nietrywialnych). Każdy kocykl wyznacza się jednoznacznie przez liczby  $a, b, r$ , mamy więc,  $Z^2(C_2, \mathbb{Z}^2) \cong \mathbb{Z}^3$ . Z kolei,  $B^2(C_2, \mathbb{Z}^2) = \{(a, b, 2k - a) \mid a, b, k \in \mathbb{Z}\} = \{(a, b, x) \mid a + x \in 2\mathbb{Z}\}$ . Zauważmy, że  $B^2(C_2, \mathbb{Z}^2) \subset Z^2(C_2, \mathbb{Z}^2)$  jest jądrem epimorfizmu  $\mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, (a, b, x) \mapsto [a + x]$ , gdzie  $[a + x]$  jest klasą parzystości liczby  $a + x$ . Ostatecznie,  $H^2(C_2, \mathbb{Z}^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong C_2$ .

W przypadku 3 mamy 2 nieizomorficzne grupy tapetowe odpowiadające 2 elementom grupy  $H^2$ . Jedna, odpowiadająca kocyklowi trywialnemu, przykładowo jest generowana przez  $M_3, t_{(2,0)}, t_{(1,0)}$  i jest grupą symetrii „tapety”



Druga, odpowiadająca kocyklowi nietrywialnemu, na przykład może być generowana przez  $t_{(1/2,0)} \circ M_3, t_{(0,1)}$  i jest grupą symetrii „tapety”



Jak „zobaczyć” nietrywialny kocykl  $c$ ? Najpierw zauważmy, że elementy grupy  $\Gamma$  są kombinacjami  $p^{k_1}q^{l_1} \dots p^{k_m}q^{l_m}$ , gdzie  $k_i, l_i \in \mathbb{Z}$ , a  $p = t_{(0,1)}, q = t_{((1/2),0)} \circ M_3$  są wyżej wymienionymi generatorami. Ponieważ, jak łatwo sprawdzić  $q^2 = t_{(1,0)}, M_3 \circ t_{(1/2,0)} = t_{(1/2,0)} \circ M_3$  oraz  $M_3 \circ p = t_{(0,-1)} \circ M_3$ , każdy element grupy  $\Gamma$  jest postaci  $t_{(n,l)}$  lub  $t_{(n/2,l)} \circ M_3$ , gdzie  $n, l \in \mathbb{Z}$ .

Przypomnijmy (zob. dowód lematu o dopuszczalnych mnożeniach w iloczynie kartezjańskim  $G_2 \times G_1$ ), że wartość kocyklu  $c(g, h)$  można „odczytać” z mnożenia elementów postaci  $(g, 0), (h, 0)$  w iloczynie kartezjańskim. Wybierzmy cięcie  $s : C_2 \rightarrow \Gamma$  na przykład tak:  $e \xrightarrow{s} t_{(0,1)}, v \xrightarrow{s} t_{(1/2,0)} \circ M_3$ . Taki wybór cięcia daje nam utożsamienie  $t_{(0,1)} \mapsto (e, (0, 0)), t_{(1/2,0)} \circ M_3 \mapsto (v, (0, 0))$  i, jako wniosek, następujące utożsamienie  $\Gamma$  (jako zbioru) z  $C_2 \times \mathbb{Z}^2$ :  $t_{(n,l)} \xrightarrow{\psi} (e, (n, l - 1)), t_{(n/2,l)} \circ M_3 \xrightarrow{\psi} (v, (n - 1, l))$  (tutaj  $n, l \in \mathbb{Z}$ ). Mamy

$$(e, (0, 0))(e, (0, 0)) = \psi(t_{(0,1)})\psi(t_{(0,1)}) = \psi(t_{(0,1)}t_{(0,1)}) = \psi(t_{(0,2)}) = (e, (0, 1)),$$

skąd  $c(e, e) = (0, 1)$ . Analogicznie

$$(v, (0, 0))(v, (0, 0)) = \psi(t_{(1/2,0)} \circ M_3)\psi(t_{(1/2,0)} \circ M_3) = \psi(t_{(1/2,0)} \circ M_3 \circ t_{(1/2,0)} \circ M_3) = \psi(t_{(1,0)}) = (e, (1, -1)),$$

skąd  $c(v, v) = (1, -1)$ .

## Literatura

[Szc] Andrzej Szczepański, *Wprowadzenie do teorii grup krystalograficznych*, Wykład monograficzny, dostępne na <http://mat.ug.edu.pl/~aszczepa/crystall1.pdf>.