Teoria grup I

Wykład 4

1 Iloczyny proste i półproste oraz rozszerzenia grup, cz. II

Literatura dodatkowa: [Kir72, Kir76]

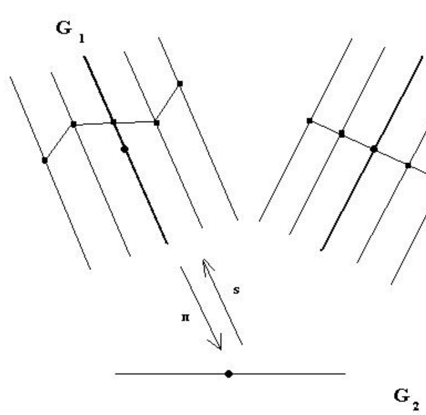
Próba odpowiedzi na pytanie 2′: Rozważmy rozszerzenie

$$\{*\} \to G_1 \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} G_2 \to \{*\}. \tag{1}$$

Najpierw zauważmy, że w tej sytuacji mamy jednoznacznie określone działanie G_2 na G_1, czyli homomorfizm $f : G_2 \to \mathrm{Aut}(G_1)$. Istotnie, każdy element $g \in G$ określa automorfizm wewnętrzny A_g, który zachowuje podgrupę G_1 ponieważ ona jest normalna. Czyli mamy homomorfizm $F : G \to \mathrm{Aut}(G_1), g \mapsto A_g|_{G_1}$. Elementy z G_1 leżą w jądrze tego homomorfizmu, bo G_1 jest abelowa, czyli F „przepuszcza się” przez G/G_1. Innymi słowy istnieje jedyny $f : G_2 \to \mathrm{Aut}(G_1)$ taki, że następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, "F"] & \\ G/G_1 \arrow[r, "f"] & \mathrm{Aut}(G_1) \end{tikzcd}.$$

Następnie, wybierzmy cięcie odwzorowania π, czyli takie odwzorowanie $s : G_2 \to G$, że $\pi s = \mathrm{Id}_{G_2}$. Wybór takiego cięcia jest równoważny wyborowi jednego przedstawiciela $s(g_2)$ w każdej warstwie $\pi^{-1}(g_2), g_2 \in G_2$, co, z kolei, jest równoważne utożsamieniu *zbiorów* G i $G_2 \times G_1$ a odwzorowań ι, π z włożeniem $\iota_\times : g_1 \mapsto [e, g_1] : G_1 \to G_2 \times G_1$ oraz z rzutem $\pi_\times$ na pierwszą składową odpowiednio. (Istotnie, jeśli $g_2 = G_1 g, h \in \pi^{-1}(g_2)$, wtedy istnieje jedyne $g_1 \in G_1$ takie, że $h = g_1 g$. Punkt h utożsamiamy z parą $[g_2, g_1]$.)



Dalej zakładamy, że $G = G_2 \times G_1$ (jako zbiór) i pytamy jakie mnożenia (działania grupowe) w $G_2 \times G_1$ są *dopuszczalne*, czyli takie, że odwzorowania $\iota_\times, \pi_\times$ są homomorfizmami grup.

LEMAT *Dopuszczalne mnożenia są postaci*

$$[g_2, g_1][h_2, h_1] = [g_2h_2, g_1 + f_{g_2}h_1 + c(g_2, h_2)],$$

gdzie $c(e, e) = 0$ *oraz* $c \in Z^2(G_2, G_1)$, *czyli jest* kocyklem. *Ponadto, jeśli* c, c' *są dwoma kocyklami odpowiadającymi równoważnym rozszerzeniom, to* $c - c' \in B^2(G_2, G_1)$, *czyli istnieje* $q \in C^1(G_2, G_1)$ *o własności* $c - c' = dq$. *Przy tym* $q(e) = 0$.

Uwaga:

Dowód: Sposób utożsamienia G z $G_2 \times G_1$ implikuje wzór

$$[e, h_1][g_2, g_1] = [g_2, g_1 + h_1], g_i, h_i \in G_i.$$

Z kolei, sposób zadania homomorfizmu f daje

$$[g_2, g_1][e, h_1][g_2, g_1]^{-1} = [e, f_{g_2}h_1].$$

Fakt, że π jest homomorfizmem oznacza w szczególności, że

$$[g_2, 0][h_2, 0] = [g_2h_2, c(g_2, h_2)]$$

dla pewnego $c \in C^2(G_2, G_1)$. Używając tych wzorów dostajemy

$$[g_2, g_1][e, h_1] = [g_2, g_1][e, h_1][g_2, g_1]^{-1}[g_2, g_1] = [e, f_{g_2}h_1][g_2, g_1] = [g_2, g_1 + f_{g_2}h_1]$$

oraz

$$[g_2, g_1][h_2, h_1] = [g_2, g_1][e, h_1][h_2, 0] = [g_2, g_1 + f_{g_2}h_1][h_2, 0] = [e, g_1 + f_{g_2}h_1][g_2, 0][h_2, 0] =$$

$$[e, g_1 + f_{g_2}h_1][g_2h_2, c(g_2, h_2)] = [g_2h_2, g_1 + f_{g_2}h_1 + c(g_2, h_2)].$$

Ponieważ $\iota_\times$ ma być homomorfizmem, mamy $\iota_\times(g_1)\iota_\times(h_1) = [e, g_1][e, h_1] = [e, g_1 + f_e h_1 + c(e, e)] = [e, g_1 + h_1] = \iota_\times(g_1 + h_1)$. Stąd $c(e, e) = 0$.

Teraz sprawdźmy warunek kocyklu:

$$([g_2, 0][h_2, 0])[j_2, 0] = [g_2h_2, c(g_2, h_2)][j_2, 0] = [g_2h_2j_2, c(g_2, h_2) + c(g_2h_2, j_2)]$$

$$[g_2, 0]([h_2, 0][j_2, 0]) = [g_2, 0][h_2j_2, c(h_2, j_2)] = [g_2h_2j_2, f_{g_2}c(h_2, j_2) + c(g_2, h_2j_2)].$$

Równoważność $Q : G_2 \times G_1 \to G_2 \times G_1$ rozszerzeń odpowiadających kocyklom c i c' oznacza istnienie odwzorowania $q : G_2 \to G_1$ takiego, że 1) $Q([g_2, g_1]) = [g_2, g_1 + q(g_2)]$ 2) Q jest homomorfizmem. Warunek 2) implikuje następujące równości:

$$Q([g_2, 0][h_2, 0]) = Q([g_2h_2, c(g_2, h_2)]) = [g_2h_2, c(g_2, h_2) + q(g_2h_2)] =$$

$$Q([g_2, 0])Q([h_2, 0]) = [g_2, q(g_2)][h_2, q(h_2)] = [g_2h_2, q(g_2) + f_{g_2}q(h_2) + c'(g_2, h_2)].$$

Stąd $c(g_2,h_2) - c'(g_2,h_2) = f_{g_2}q(h_2) - q(g_2h_2) + q(g_2)$.

Mamy też $0 = c(e,e) - c'(e,e) = q(e) - q(e) + q(e) = q(e)$. $\square$

Uwaga: Jeśli kocykl c jest kobrzegiem, czyli $c = dq$ dla pewnego $q \in C^1(G_2, G_1)$, to odwzorowanie $s' : g_2 \mapsto [g_2, -q(g_2)] : G_2 \to G_2 \times G_1$ jest homomorfizmem. Istotnie, wyrażenie $s'(g_2h_2) = [g_2h_2, -q(g_2h_2)]$ jest równe $s'(g_2)s'(h_2) = [g_2, -q(g_2)][h_2, -q(h_2)] = [g_2h_2, -q(g_2) - f_{g_2}q(h_2) + c(g_2,h_2)]$ wskutek definicji dq.

Rozpoznawanie iloczynów półprostych wśród wszystkich rozszerzeń: Rozszerzenie (1) jest równoważne z $\{*\} \to G_1 \to G_1 \times_f G_2 \to G_2 \to \{*\}$ jeśli i tylko jeśli odwzorowanie π posiada cięcie $s' : G_2 \to G$ będące *homomorfizmem* grup. Istotnie, poprzez wybór cięcia $s : G_2 \to G$ (nie będącego w ogólności homomorfizmem) utożsamiamy G z $G_2 \times G_1$ a samo s z odwzorowaniem $g_2 \mapsto [g_2, 0]$. Równowazność z iloczynem półprostym $G_1 \times_f G_2$ oznacza trywialność kocyklu c (czyli istnienie q takiego, że $c = dq$) i homomorficzność „nowego" cięcia $s' : g_2 \mapsto [g_2, -q(g_2)]$.

Uwaga: Element $q \in C^1(G_2, G_1)$ taki, że $dq = c$ jest określony z dokładnością do dodawania elementów kobrzegowych da (tutaj $a \in G_1, da(g_2) = f_{g_2}a - a$). Cięcie $s'' : G_2 \to G, s''(g_2) := [g_2, -q(g_2) - da(g_2)]$, jest otrzymane z ciecia s' zastosowaniem automorfizmu wewnętrznego $A_a : G \to G$, czyli $s'' = A_a \circ s'$. Istotnie, $[e,a][g_2, -q(g_2)][e,a]^{-1} = [g_2, a - q(g_2)][e, -a] = [g_2, a - q(g_2) - f_{g_2}a]$.

Przykład rozszerzenia nie bedącego iloczynem półprostym: Rozważmy tzw. grupę Heisenberga składającą się z macierzy postaci

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jasne, że jako zbiór ona może być utożsamiona z $\mathbb{R}^3$. Mnożenie natomiast jest zadawane następującym wzorem: $[x,y,z][x',y',z'] = [x+x', y+y'+xz', z+z']$. Jest to rozszerzenie grupy abelowej $G_2 = (\mathbb{R}^2, +)$ za pomocą grupy abelowej $G_1 = (\mathbb{R}, +)$ z kocyklem $c([x,z],[x',z']) := xz'$ (i trywialnym działaniem f). Kocykl ten nie może być kobrzegiem: kobrzeg $dq(gh) = q(h) - q(gh) + q(g)$ na grupie abelowej jest funkcją symetryczną argumentów g, h. Kocykl c, natomiast, funkcją symetryczną nie jest.

W szczególności z tego wynika też, że grupa kohomologii $H^2(C_2, C_1)$ jest nietrywialna.

Uwaga: Powyższy lemat pokazuje, że grupa kohomologii $H^2(G_2, G_1)$ jest w bijekcji z klasami równoważności rozszerzeń grupy G_2 za pomocą grupy G_1.

Ćwiczenie: Pokazać, że klasy „autorównoważności" rozszerzenia (1) modulo „autorównoważności" pochodzące z automorfizmów wewnętrznych A_a, gdzie $a \in G_1$, są w bijekcji z grupą $H^1(G_2, G_1)$.

Odpowiedź na pytanie 1′: Ponieważ homomorfizm $f : G_2 \to \mathrm{Aut}(G_1)$ jest jednoznacznie wyznaczony przez rozszerzenie (1), rozszerzenia $\{*\} \to G_1 \xrightarrow{\iota_\times} G_1 \times_f G_2 \xrightarrow{\pi_\times} G_2 \to \{*\}$ oraz $\{*\} \to G_1 \xrightarrow{\iota_\times} G_1 \times_{f'} G_2 \xrightarrow{\pi_\times} G_2 \to \{*\}$ są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy $f = f'$.

Zadania na ćwiczenia. *Inne spojrzenie na działanie grupy na zbiorze:* Niech $\mu : G \times X \to X$ będzie lewym działaniem grupy G na zbiorze X. Pokazać, że: 1) przy ustalonym $g \in G$ odwzorowanie $x \mapsto \mu(g,x) : X \to X$ jest bijekcją, czyli $\mu(g,\cdot) \in S_X$; 2) odwzorowanie $g \mapsto \mu(g,\cdot) : G \to S_X$ jest homomorfizmem grup. Odwrotnie, każdy homomorfizm $f : G \to S_X$ zadaje działanie $\mu : G \times X \to X$ według wzoru $\mu(g,x) := f_g x$ (tutaj $f_g := f(g)$).

„Działanie z kocyklem”: Niech $f : G_2 \to \mathrm{Aut}(G_1)$ będzie homomorfizmem, a $q \in Z^1(G_2, G_1)$ pewnym kocyklem. Pokazać, że odwzorowanie $\tilde{f} : G_2 \to S_{G_1}, \tilde{f}_{g_2} g_1 + q(g_2)$, jest homomorfizmem, czyli zadaje działanie G_2 na G_1 za pomocą „przekształceń afinicznych”.

Przykład 1: Niech $G_2 := (\mathbb{R}^n, +), G_1 := (\mathbb{R}^m, +)$ i niech $f : G_2 \to \mathrm{Aut}(G_1)$ homomorfizm trywialny. Pokazać, że każdy operator liniowy $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jest kocyklem. Znaleźć orbitę i stabilizator każdego punktu $x \in \mathbb{R}^m$ ze względu na „działąnie z kocyklem” $\tilde{f}$.

Przykład 2: Niech $G_2 := SO(2, \mathbb{R}), G_1 := (\mathbb{R}^2, +)$ i niech $f : G_2 \to \mathrm{Aut}(G_1)$ działanie naturalne. Rozważmy kocykl $q = da$ będący kobrzegiem (tutaj $a \in G_1, q(g_2) := f_{g_2} a - a, g_2 \in G_2$). Opisać „działanie z kocyklem” $\tilde{f}$. *Odpowiedź:* działanie $\tilde{f}$ polega na obrotach płaszczyzny wokół elementu $-a$.

Literatura

[Kir72] A.A. Kirillov, *Elementy teorii reprezentacji*, Nauka, 1972, W języku rosyjskim.

[Kir76] ______, *Elements of the theory of representations*, Springer-Verlag, Berlin, 1976, Translated from the Russian.