Teoria grup I

Wykład 3

1 Iloczyny proste i półproste oraz rozszerzenia grup, cz. I

Poniżej określimy sposoby „sklejania cegiełek”, czyli budowania z kilku grup jednej, bardziej skomplikowanej grupy.

Iloczyn prosty grup $G_1, \dots, G_n$: Jest to zbiór $G_1 \times \dots \times G_n$ wyposażony w działanie $(g_1, \dots, g_n) \cdot (h_1, \dots, h_n) := (g_1 h_1, \dots, g_n h_n)$ z elementem neutralnym $(e_1, \dots, e_n)$ oraz $(g_1, \dots, g_n)^{-1} := (g_1^{-1}, \dots, g_n^{-1})$.

Przykład: Grupa $GL_+(2, \mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{R}) \mid \det A > 0\}$ jest izomorficzna z $\mathbb{R}_{>0} \times SL(2, \mathbb{R})$, gdzie $SL(2, \mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$. Rzeczywiście, izomorfizm zadajemy wzorem $F : \mathbb{R}_{>0} \times SL(2, \mathbb{R}) \to GL_+(2, \mathbb{R}), F([x, X]) := xX$ a jego odwrotność to $Z \to [\sqrt{\det Z}, Z/\sqrt{\det Z}]$.

Iloczyn półprosty $G_2 \ltimes G_1$ grup G_2 i G_1: Załóżmy, że mamy działanie grupy G_2 na grupie G_1, „respektujące strukturę grupy” na G_1. Innymi słowy, zadany jest homomorfizm $f : G_2 \to \mathrm{Aut}(G_1)$ (w takiej sytuacji można też powiedzieć, że jest zadana reprezentacja grupy G_2 w grupie G_1).

Określamy działanie na zbiorze $G_2 \times G_1$: $[g_2, g_1] \cdot [h_2, h_1] := [g_2 \cdot h_2, g_1 \cdot f_{g_2} h_1]$ (tutaj oznaczyliśmy $f_{g_2} h_1 := f(g_2) h_1$).

Łączność: $([g_2, g_1] \cdot [h_2, h_1]) \cdot [j_2, j_1] = [g_2 \cdot h_2, g_1 \cdot f_{g_2} h_1] \cdot [j_2, j_1] = [(g_2 \cdot h_2) \cdot j_2, (g_1 \cdot f_{g_2} h_1) \cdot f_{g_2 \cdot h_2} j_1] = [g_2 \cdot h_2 \cdot j_2, (g_1 \cdot f_{g_2} h_1) \cdot (f_{g_2} \circ f_{h_2} j_1)] = [g_2 \cdot h_2 \cdot j_2, g_1 \cdot (f_{g_2} h_1 \cdot f_{g_2}(f_{h_2} j_1))] = [g_2 \cdot (h_2 \cdot j_2), g_1 \cdot (f_{g_2}(h_1 \cdot f_{h_2} j_1))] = [g_2, g_1] \cdot [h_2 \cdot j_2, h_1 \cdot f_{h_2} j_1] = [g_2, g_1] \cdot ([h_2, h_1] \cdot [j_2, j_1])$

Element neutralny: $[e_2, e_1]$

Element odwrotny: $[g_2, g_1]^{-1} := [g_2^{-1}, f_{g_2^{-1}} g_1^{-1}]$

Inne oznaczenie dla $G_2 \ltimes G_1$ to $G_2 \times_f G_1$.

Przykład: Grupa $O(\mathbb{R}^2)$ liniowych odwracalnych przekształceń ortogonalnych płaszczyzny euklidesowej jest izomorficzna z iloczynem $\mathbb{Z}_2 \ltimes SO(\mathbb{R}^2)$ grupy $\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ z grupą obrotów $SO(\mathbb{R}^2)$. Rzeczywiście, $O(\mathbb{R}^2)$ jest izomorficzna z grupą $O(2, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{R}) \mid AA^T = I\} = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a^2 + b^2 = 1, c^2 + d^2 = 1, ac + bd = 0\}$ a $SO(\mathbb{R}^2)$ z $SO(2, \mathbb{R}) = \{A \in O(2, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$).

Określmy homomorfizm $f : \{\pm 1\} \to \mathrm{Aut}(SO(2, \mathbb{R}))$ wzorem $1 \mapsto \mathrm{Id}, -1 \mapsto L$, gdzie $L : O_\phi \mapsto O_{-\phi}$, tutaj $O_\phi := \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$) jest macierzą obrotu o kąt ϕ. Zauważmy, że L rzeczywiście jest elementem $\mathrm{Aut}(SO(2, \mathbb{R}))$: odwzorowanie $L : SO(2, \mathbb{R}) \to SO(2, \mathbb{R})$ jest ograniczeniem do $SO(2, \mathbb{R})$ automorfizmu wewnętrznego A_g grupy $O(2, \mathbb{R})$, gdzie $g = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (*Ćwiczenie:* sprawdzić ten fakt). Ponadto, ponieważ $g^2 = I$, odwzorowanie f jest homomorfizmem.

Zostało zbudować izomorfizm $F : \mathbb{Z}_2 \times_f SO(2, \mathbb{R}) \to O(2, \mathbb{R})$. Połóżmy $\sigma(1) := 0, \sigma(-1) := 1$ oraz $F([x, X]) := Xg^{\sigma(x)}$ (mamy $f(x) = A_{g^{\sigma(x)}}$). Wtedy $F([x, X] \cdot [y, Y]) = F([xy, XA_{g^{\sigma(x)}}(Y)]) =$

$Xg^{\sigma(x)}Yg^{\sigma(x)}g^{\sigma(xy)} = Xg^{\sigma(x)}Yg^{\sigma(x^2y)} = Xg^{\sigma(x)}Yg^{\sigma(y)} = F([x,X])\cdot F([y,Y])$. Homomorfizm odwrotny: $F^{-1}(Z) := [\det Z, Zg^{\sigma(\det Z)}]$. (*Ćwiczenie:* sprawdzić, że $FF^{-1}(Z) = Z$ oraz $F^{-1}F([x,X]) = [x,X]$.)

Przykład: Grupa $GL(2,\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$, jest izomorficzna z $\mathbb{R}^* \ltimes SL(2,\mathbb{R})$, gdzie $SL(2,\mathbb{R}) : \{A \in \mathrm{Mat}(2,\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$, a $\mathbb{R}^*$ to inne oznaczenie dla grupy $(\mathbb{R}_{\neq 0}, \cdot)$. Rzeczywiście, określmy odwzorowanie $\tau : \mathbb{R}^* \to \{0,1\}, \tau(x) := \sigma(\mathrm{sign}(x))$, oraz homomorfizm $f : R^* \to \mathrm{Aut}(SL(2,\mathbb{R})), f(x) := A_{g^{\tau(x)}}$. Izomorfizm $F : \mathbb{R}^* \times_f SL(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R})$ określamy wzorem $F([x,X]) := xXg^{\tau(x)}$. *Ćwiczenie:* zbudować izomorfizm odwrotny, sprawdzić szczegóły.

Przykład: Grupa $SE(2,\mathbb{R}) := SO(2,\mathbb{R}) \times_f \mathbb{R}^2$ ruchów płaszczyzny euklidesowej. Tutaj $f : SO(2,\mathbb{R}) \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^2)$ standardowe działanie grupy obrotów płaszczyzny na płaszczyźnie.

Uwaga 1: Jeśli f jest homomorfizmem trywialnym, to $G_2 \times_f G_1 \cong G_2 \times G_1$.

Pytanie 1: Czy bywają nietrywialne f, dla których też $G_2 \times_f G_1 \cong G_2 \times G_1$? Bardziej ogólnie: jeśli $f_1, f_2 : G_2 \to \mathrm{Aut}(G_1)$ dwa homomorfizmy, kiedy istnieje izomorfizm $G_2 \times_{f_1} G_1 \cong G_2 \times_{f_2} G_1$

Uwaga 2: odwzorowanie $\pi : [g_2, g_1] \mapsto g_2 : G \to G_2$ jest epimorfizmem grup: $\pi([g_2,*][h_2,*]) = \pi([g_2h_2,*]) = g_2h_2 = \pi([g_2,*])\pi([h_2,*])$. Stąd mamy wnioski: a) $\{e\} \times G_1 = \ker \pi$ podgrupa normalna w $G = G_2 \times_f G_1$; b) $G/G_1 \cong G_2$ (izomorfizm grup).

Pytanie 2: Czy każda grupa G posiadająca podgrupę normalną G_1 jest izomorficzna z $G_2 \times_f G_1$, gdzie f pewien homomorfizm z grupy ilorazowej $G_2 = G/G_1$ w grupę $Aut(G_1)$?

W celu znalezienia odpowiedzi na to pytanie wprowadźmy kilka nowych pojęć.

Ciąg dokładny homomorfizmów grup: Jest to ciąg $\cdots \xrightarrow{f_{k-1}} G_k \xrightarrow{f_k} G_{k+1} \to \cdots$ grup i ich homomorfizmów taki, że $\mathrm{im}\, f_{k-1} = \ker f_k$ dla każdego k.

Krótki ciąg dokładny: Jest to ciąg dokładny postaci $\{*\} \to G_1 \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} G_2 \to \{*\}$. W szczególności mamy: $\ker \iota = \{e\}$, czyli ι jest włożeniem; $\mathrm{im}\, \pi = G_2$, czyli π jest epimorfizmem; $\mathrm{im}\, \iota = \ker \pi$, czyli podgrupa $\mathrm{im}\, \iota \cong G_1$ jest podgrupą normalną, a grupa G_2 jest izomorficzna z grupą ilorazową G/G_1.

Rozszerzenie grupy G_2 za pomocą grupy G_1: Jest to krótki ciąg dokładny postaci

$$\{*\} \to G_1 \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} G_2 \to \{*\}. \tag{1}$$

Równoważność rozszerzeń: Rozszerzenia $\{*\} \to G_1 \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} G_2 \to \{*\}$ oraz $\{*\} \to G_1 \xrightarrow{\iota'} G' \xrightarrow{\pi'} G_2 \to \{*\}$ są równoważne, jeśli istnieje izomorfizm $Q : G \to G'$ dla którego następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd}
 & & G \arrow[d, "Q"] \arrow[dr, "\pi"] & & \\
\{*\} \arrow[r] & G_1 \arrow[ur, "\iota"] \arrow[r, "\iota'"] & G' \arrow[r, "\pi'"] & G_2 \arrow[r] & \{*\}
\end{tikzcd}$$

Pytanie 2 teraz można przeformułować: czy każde rozszerzenie $\{*\} \to G_1 \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} G_2 \to \{*\}$ jest równoważne z $\{*\} \to G_1 \xrightarrow{\iota} G_1 \times_f G_2 \xrightarrow{\pi} G_2 \to \{*\}$ dla pewnego f? Spróbujemy dać na niego odpowiedź w terminach tzw. *kohomologii* grupy G_2 w szczególnym przypadku *abelowej* grupy G_1.

Założenie o grupie G_1: Od tego momentu zakładamy, że G_1 jest *abelowa.* Operację w G_1 będziemy oznaczali plusem, element neutralny zerem, a element odwrotny minusem (tzw. *notacja addytywna*).

Kohomologie grupy G_2 o wartościach w (abelowej) grupie G_1: Niech $f : G_2 \to \mathrm{Aut}(G_1)$ ustalony homomorfizm. Dowolną funkcję $c : G_2^n \to G_1$ nazywamy n-kołańcuchem na G_2 o wartościach G_1. Zbiór n-kołańcuchów oznaczmy przez $C^n(G_2, G_1)$ (tworzy on grupę abelową ze względu na dodawanie funkcji). Z definicji $C^0(G_2, G_1) = G_1$. Określmy odwzorowania $d^i : C^i(G_2, G_1) \to C^{i+1}(G_2, G_1)$

$$\begin{aligned}
d^0 c(g) &:= f_g c - c, \ c \in G_1, g \in G_2; \\
d^1 c(g,h) &:= f_g c(h) - c(gh) + c(g), \ g,h \in G_2, c \in C^1(G_2, G_1); \\
d^2 c(g,h,j) &:= f_g c(h,j) - c(gh,j) + c(g,hj) - c(g,h), \ g,h,j \in G_2, c \in C^2(G_2, G_1).
\end{aligned}$$

Łatwo się sprawdza (*Ćwiczenie*), że 1) d^i jest homomorfizmem grup; 2) $d^{i+1} d^i = 0$. Z 2) mamy wniosek: $\mathrm{im}\, d^i \subset \ker d^{i+1}$. Mówimy, że $Z^i(G_2, G_1) := \ker d^i$ jest i-tą grupą *kocykli*, $B^i(G_2, G_1) := \mathrm{im}\, d^i$ jest i-tą grupą *kobrzegów*, a $H^i(G_2, G_1) := \ker d^i / \mathrm{im}\, d^{i-1}$ jest i-tą grupą *kohomologii* grupy G_2 („o wartościach w G_1”, lub, bardziej dokładnie, „w reprezentacji f”).