Teoria grup I

Wykład 13

1 Grupy Liego, cz. II

Algebra Liego $(V, [,])$: Jest to przestrzeń wektorowa V nad ciałem $\mathbb{K}$ wyposażona w działanie 2-liniowe $(x, y) \mapsto [x, y] : V \times V \to V$, spełniające następujące warunki:

1. $[x, y] = -[y, x]\ \forall x, y \in V$ (skośna symetria);
2. $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0\ \forall x, y, z \in V$ (tozsamość Jacobiego).

PRZYKŁAD: Niech $(A, \cdot)$ będzie dowolną algebrą łączną. Wtedy $(A, [,])$, gdzie $[x, y] := x \cdot y - y \cdot x$ jest algebrą Liego (*Ćwiczenie:* sprawdzić). W szczególności, $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{K})$ z komutatorem macierzowym jest algebrą Liego. Oznaczamy $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) := (\mathrm{Mat}(n, \mathbb{K}), [,])$.

Ogólniej, jeśli W jest dowolną przestrzenią wektorową, zbiór $\mathrm{End}(W)$ endomorfizmów przestrzeni W (czyli operatorów liniowych $L : W \to W$) jest algebrą Liego.

Homomorfizm algebr Liego $(V_1, [,]_1)$ i $(V_2, [,]_2)$: Jest to odwzorowanie liniowe $\phi : V_1 \to V_2$ zachowujące „nawiasy", czyli $\phi[x, y]_1 = [\phi x, \phi y]_2\ \forall x, y \in V_1$.

Ćwiczenie: Niech $(V, [,])$ będzie przestrzeią wektorową wyposażoną w działanie 2-liniowe *skośnie symetryczne*. Określmy operator $\mathrm{ad}_x \in \mathrm{End}(V)$ wzorem $\mathrm{ad}_x y := [x, y], x, y \in V$. Pokazać, że tożsamość Jacobiego (TJ) jest równoważna następującemu warunkowi: $[\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y] = \mathrm{ad}_{[x,y]}$ (w szczególności, jeśli $[,]$ spełnia TJ, to odwzorowanie $x \mapsto \mathrm{ad}_x : V \to \mathrm{End}(V)$ jest homomorfizmem algebr Liego).

Podalgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ algebry Liego $(\mathfrak{g}, [,])$: Jest to podprzestrzeń liniowa w $\mathfrak{g}$ zamknięta ze względu na nawias: $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$.

PRZYKŁAD: Podprzestrzeń $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ macierzy *bezśladowych* (mamy $\mathrm{Tr}([x, y]) = \mathrm{Tr}(xy - yx) = 0$ dla dowolnych $x, y \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, w szczególności komutator macierzy bezśladowych jest bezśladowy).

PRZYKŁAD: Podprzestrzeń $\mathfrak{o}(n, \mathbb{R}) \subset \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ macierzy *skośnie ortogonalnych*, czyli takich macierzy x, że $x = -x^T$. Dla $x, y \in \mathfrak{o}(n, \mathbb{R})$ mamy $[x, y]^T = (xy - yx)^T = y^T x^T - x^T y^T = yx - xy = -[x, y]$.

Algebra Liego różniczkowań algebry łącznej $(A, \cdot)$: *Różniczkowaniem* algebry łącznej nazywamy odwzorowanie liniowe $d : A \to A$ spełniające warunek $d(x \cdot y) = dx \cdot y + x \cdot dy$. Różniczkowania tworzą podprzestrzeń $D \subset \mathrm{End}(A)$ i, ponadto, podalgebrę Liego w $(\mathrm{End}(A), [,])$. Istotnie, $(d_1 d_2 - d_2 d_1)(x \cdot y) = d_1(d_2 x \cdot y + x \cdot d_2 y) - d_2(d_1 x \cdot y + x \cdot d_1 y) = d_1 d_2 x \cdot y + d_2 x \cdot d_1 y + d_1 x \cdot d_2 y + x \cdot d_1 d_2 y - (d_2 d_1 x \cdot y + d_1 x \cdot d_2 y + d_2 x \cdot d_1 y + x \cdot d_2 d_1 y) = (d_1 d_2 - d_2 d_1) x \cdot y + x \cdot (d_1 d_2 - d_2 d_1) y$.

Algebra Liego $\mathrm{Vect}(M)$ **pól wektorowych na rozmaitości gładkiej** M**:** Rozważmy przestrzeń $(\mathbb{C}^\infty(M,\mathbb{R}),\cdot)$ funkcji gładkich na M o wartościach rzeczywistych ze strukturą (przemiennej) algebry łącznej względem mnożenia punktowego funkcji. Różniczkowania tej algebry nazywają się *polami wektorowymi* na M i tworzą algebrę Liego względem komutatora.

Inaczej na pola wektorowe można patrzeć jako na cięcia gładkie wiązki stycznej $TM \xrightarrow{\tau} M$. Elementami TM są pary (v,x), gdzie $x \in M$, a v jest wektorem stycznym do M zaczepionym w punkcie x. Zbiór wszystkich takich wektorów, czyli włókno nad x, oznaczamy T_xM. Każde pole wektorowe ma więc postać $(v(x),x)$, gdzie $x \in M$, a wektor $v(x) \in T_xM$ gładko zależy od punktu x.

Wiązka TM jest wiązką lokalnie trywialną, czyli jej ograniczenie TU na mały podzbiór otwarty $U \subset M$ może być utożsamione z wiązką trywialną $\mathbb{R}^n \times U \to U$, gdzie $n = \dim M$, a jej cięcia mogą być utożsamione z parami $(f(x),x)$, gdzie $x \in U$, a $f : U \to \mathbb{R}^n, f(x) = (f^1(x),\dots,f^n(x))$ jest funkcją gładką. Utożsamienie włókien wiązki TU z $\mathbb{R}^n$ jest związane z wyborem współrzędnych lokalnych $(x^1,\dots,x^n)$ na U. Alternatywnie, pole wektorowe zapisujemy jako $f = f^i\partial_i$ (sumowanie po i), gdzie $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$, a jego działanie na funkcje $F \in \mathbb{C}^\infty(U,\mathbb{R})$ wygląda następująco: $fF := f^i(\partial_i F)$ (jest różniczkowaniem w sensie powyższej definicji).

Dla komutatora pól wektorowych mamy następujący wzór:

$$[f,g]^i(x) = f^j(x)(\partial_j g^i(x)) - g^j(x)(\partial_j f^i(x))$$

(*Ćwiczenie:* sprawdzić).

Zachowanie pól wektorowych względem dyfeomorfizmów $\psi : M \to M$**:** Każdy taki dyfeomorfizm generuje *odwzorowanie styczne* $\psi_* : TM \to TM$, które na parach $(v,x), x \in M, v \in T_xM$, będziemy zapisywali jako $\psi_*(v,x) = (\psi_*|_x v, \psi(x))$, tutaj $\psi_*|_x : T_xM \to T_{\psi(x)}M$ jest pewnym odwzorowaniem liniowym. Jeśli $\psi(x_0) = y_0$, i jeśli $(x^1,\dots,x^n),(y^1,\dots,y^n)$ są współrzędnymi lokalnymi w otoczeniach $X \ni x_0, Y \ni y_0$, odwzorowanie ψ można zadać jako n-tkę funkcji $(x^1,\dots,x^n) \mapsto (y^1 = \psi^1(x),\dots,y^n = \psi^n(x))$. Odwzorowanie $\psi_*|_x : T_xM \cong \mathbb{R}^n \times \{x\} \to T_{\psi(x)}M \cong \mathbb{R}^n \times \{\psi(x)\}$ pokrywa się wtedy z macierzą Jacobiego

$$J[\psi](x) := \begin{bmatrix} \partial_1\psi^1 & \dots & \partial_1\psi^n \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_n\psi^1 & \dots & \partial_n\psi^n \end{bmatrix}$$

traktowaną jako odwzorowanie liniowe $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Odwzorowanie ψ_* działa na pola wektorowe: $\mathrm{Vect}(M) \ni f \mapsto \psi_* f \in \mathrm{Vect}(M), f = (f(x),x) \mapsto (J[\psi](x)f(x), \psi(x))$. Okazuje się, że $\psi_* : \mathrm{Vect}(M) \to \mathrm{Vect}(M)$ jest homomorfizmem algebry Liego, czyli $\psi_*[f,g] = [\psi_* f, \psi_* g]$ (*Ćwiczenie:* sprawdzić).

Algebra Liego lewoniezmienniczych pól wektorowych na grupie Liego G**:** Dla $g \in G$ określmy odwzorowanie lewej translacji $L_g : G \to G$ wzorem $L_g x := gx$. Mając element $v \in T_eG$ możemy zbudować pole wektorowe $v^l \in \mathrm{Vect}(G)$ kładząc $v^l = ((L_g)_*|_e v, g)$. Tak okreslone pole wektorowe jest *lewoniezmiennicze*, czyli $(L_g)_* v^l = v^l$. Istotnie, jeśli $v^l = (v^l(g), g)$, to $(L_{g'})_* v^l = ((L_{g'})_*|_g v^l(g), L_{g'} g) = ((L_{g'})_*|_g (L_g)_*|_e v, g'g) = ((L_{g'}L_g)_*|_e v, g'g) = ((L_{g'g})_*|_e v, g'g) = v^l$. Tutaj skorzystaliśmy z tożsamości $(\psi \circ \eta)_* = \psi_* \circ \eta_*$, gdzie ψ, η są dowolnymi dyfeomorfizmami.

Odwrotnie, jeśli pole $w \in \mathrm{Vect}(G)$ jest lewoniezmiennicze, to $w = v^l$, gdzie $v := w(e)$. Mamy więc utożsamienie zbioru $\mathfrak{g}$ lewoniezmienniczych pól wektorowych z włóknem T_eG. Okazuje się, że $\mathfrak{g}$ jest podalgebrą Liego w $\mathrm{Vect}(G)$. To wynika z następującego lematu.

LEMAT *Niech* $(V, [,])$ *będzie algebrą Liego, a* Ψ *pęwnym zbiorem jej homomorfizmów. Wtedy zbiór* $V^\Psi := \{x \in V \mid \psi(x) = x \ \forall \psi \in \Psi\}$ *jest podalgebrą Liego.*

Dowód: Niech $x, y \in V^\Psi$, wtedy dla każdego $\psi \in \Psi$ mamy $\psi[x,y] = [\psi x, \psi y] = [x,y]$, czyli $[x,y] \in V^\Psi$.

Algebra Liego $\mathfrak{g}$ grupy Liego G: Jest to określona powyżej algebra Liego pól lewoniezmienniczych na G. Oznaczamy też $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$. Zauważmy, że, ponieważ odwzorowanie $\phi_l : T_eG \to \mathfrak{g}, v \mapsto v^l$, jest izomorfizmem przestrzeni liniowych, $\dim \mathfrak{g} = n = \dim G$. Ponadto, używając tego izomorfizmu, możemy „przenieść" strukturę algebry Liego z $\mathfrak{g}$ na T_eG według wzoru $[v,w] := \phi_l^{-1}[\phi_l v, \phi_l w] = [v^l, w^l](e)$.

Dlatego też często pod „algebrą Liego" grupy G rozumie się przestrzeń T_eG wyposażona w powyższy nawias.

PRZYKŁAD: Niech $G := GL(n, \mathbb{R})$. Ponieważ G jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^{n^2}$, mamy $TG = \mathbb{R}^{n^2} \times G$ i każde pole wektorowe jest postaci $(V(X), X)$, gdzie $V(X)$ jest gładka funkcja na G o wartościach macierzowych: $V(X) = \begin{bmatrix} V_{11}(X) & \dots & V_{1n}(X) \\ & \dots & \\ V_{n1}(X) & \dots & V_{nn}(X) \end{bmatrix}$. Łatwo widzieć, że jeśli $V \in T_IG \cong \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$, to $V^l = (XV, X)$. Innymi słowy, $V^l = X_{ij}V_{jk}\partial_{ik}$. Stąd $[V^l, W^l]^{i'k'} = (X_{ij}V_{jk}\partial_{ik}X_{i'j'}W_{j'k'}) - (X_{ij}W_{jk}\partial_{ik}X_{i'j'}V_{j'k'}) = (X_{ij}V_{jk}\delta_{ii'}\delta_{kj'}W_{j'k'}) - (X_{ij}W_{jk}\delta_{ii'}\delta_{kj'}V_{j'k'}) = (X_{i'j}V_{jk}W_{kk'}) - (X_{i'j}W_{jk}V_{kk'}) = X_{i'j}[V,W]_{jk'} = ([V,W]^l)^{i'k'}$. Stąd struktura algebry Liego na $T_IG \cong \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ „przeniesiona" z algebry Liego pól lewoniezmienniczych pokrywa się z $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$.

Ćwiczenie: Niech $H \subset G$ będzie podgrupą Liego grupy Liego G. Pokazać, że podprzestrzeń $T_eH \subset T_eG$ jest podalgebrą Liego w algebrze Liego $\mathfrak{g} = T_eG$ i, co więcej, T_eH jako algebra Liego pokrywa się z $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(H)$.

PRZYKŁAD: Niech $G := GL(n, \mathbb{R}), H := O(n, \mathbb{R})$. Wtedy $T_IG = \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, a podprzestrzeń T_IH może być obliczona jako zbiór wektorów stycznych w zerze do krzywych gładkich $t \mapsto c(t) \in O(n, \mathbb{R}), c(0) = I$. Różniczkując tożsamość $c(t)(c(t))^T = I$ w zerze, otrzymujemy $c'(0)(c(0))^T + c(0)(c'(0))^T = 0$, skąd $c'(0) + (c'(0))^T = 0$. Wnioskujemy stąd, że T_IH składa się z macierzy skośnie ortogonalnych i że $\mathfrak{h} = \mathfrak{o}(n, \mathbb{R})$.

Twierdzenia Liego

TWIERDZENIE *(I twierdzenie Liego) Jeśli dla skończenie wymiarowej algebry Liego* $\mathfrak{g}$ *istnieje grupa Liego* G *taka, że* $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$*, to istnieje też jedyna jednospójna grupa Liego* G' *o własności* $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G')$.

Uwaga: Jednospójność oznacza ściągalność każdej pętli.

PRZYKŁAD: Grupy Liego $(\mathbb{R}, +)$ i $U(1)$ mają tę samą algebrę Liego $\mathbb{R}$ (z nawiasem zerowym $[x,y] = 0 \ \forall x, y \in \mathbb{R}$. Pierwsza z nich jest jednospójna, druga nie.

TWIERDZENIE *(II twierdzenie Liego) Niech* $\phi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ *będzie homomorfizmem skończenie wymiarowych algebr Liego i niech* G_1, G_2 *będą takimi grupami Liego, że* $\mathfrak{g}_i = \mathrm{Lie}(G_i), i = 1, 2$*. Jeśli* G_1 *jest jednospójna, to istnieje jedyny homomorfizm grup Liego* $\Phi : G_1 \to G_2$ *„całkujący"* ϕ.

Uwaga: Homomorfizmem grup Liego nazywamy odwzorowanie $\Phi : G_1 \to G_2$ będące 1) homomorfizmem grup; 2) odwzorowaniem gładkim. Okazuje się, że odwzorowanie $\Phi_*|_{e_1} : T_{e_1}G_1 \to T_{e_2}G_2$ jest homomorfizmem odpowiednich algebr Liego $\phi := \Phi_*|_{e_1} : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$. Mówimy, że Φ „całkuje" ϕ.

TWIERDZENIE *(III twierdzenie Liego) Dla każdej skończenie wymiarowej algebry Liego* $\mathfrak{g}$ *istnieje grupa Liego* G *taka, że* $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$.

Twierdzenia Liego pokazują, że badanie grup Liego w dużej mierze sprowadza się do badania algebr Liego.