Teoria grup I

Wykład 12

1 Grupy Liego, cz. I

Grupa Liego: Jest to grupa (G, μ) taka, że G jest wyposażone w strukturę rozmaitości różniczkowej o tej własności, że działanie grupowe $\mu : G \times G \to G$ oraz odwzorowanie $\epsilon : g \mapsto g^{-1} : G \to G$ są gładkie.

Przykład podstawowy: $G := GL(n, \mathbb{R}) = \{X \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid \det X \neq 0\}$ grupa odwracalnych macierzy $n \times n$ o wyrazach rzeczywistych. Funkcja $\det : \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ jest wielomianem na $\mathbb{R}^{n^2}$, więc jest ciągła. Wnioskujemy stąd, że zbiór $\{X \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid \det x = 0\} = \det^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ jest domknięty, a jego dopełnienie $GL(n, \mathbb{R})$ jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^{n^2}$. Możemy teraz wyposażyć G w strukturę rozmaitości gładkiej „odziedziczonej" z $\mathbb{R}^{n^2}$.

Mnożenie macierzy $\mu : \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \times \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}), (X, Y) \mapsto XY$, jest odwzorowaniem wielomianowym $\mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{n^2}$, jest więc gładkie i zostaje takim po ograniczeniu do zbioru otwartego $G \times G \subset \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \times \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$.

Odwzorowanie $\epsilon : G \to G, X \mapsto X^{-1}$, jest zadane przez odwzorowanie wymierne na $\mathbb{R}^{n^2}$, czyli takie, że jego składowe są stosunkami wielomianów. Przy tym wielomian pojawiający się w mianowniku to wyznacznik. Ostatni nie zeruje się na podzbiorze $G \subset \mathbb{R}^{n^2}$, stąd ϵ również jest odwzorowaniem gładkim.

Uwaga: Analogicznie możemy rozpatrywać grupę $G := GK(n, \mathbb{C})$ odwracalnych macierzy $n \times n$ o wyrazach zespolonych. Można ją rozpatrywać jako podzbiór otwarty w $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{n^2} \cong \mathbb{R}^{2n^2}$ i traktować jako grupę Liego. Istotnie, odwzorowania μ i ϵ będą odpowiednio wielomianowym i wymiernym (z niezerującym się mianownikiem) odwzorowaniami od części rzeczywistych i urojonych wyrazów macierzy.

Alternatywne spojrzenie polega na patrzeniu na G jako na *rozmaitość zespoloną* i *zespoloną grupę Liego.*

Podgrupa Liego $H \subset G$ w grupie Liego G: Jest to podgrupa, będąca podrozmaitośćią gładką w G. Grupa H sama jest grupą Liego. Istotnie, odwzorowania $\mu : G \times G \to G$ i $\epsilon : G \to G$ ograniczone do $H \times H$ i H odpowiednio, są gładkie.

Przykład: Niech $G := GL(1, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^*$, $H := U(1) = \{z \in GL(1, \mathbb{C}) \mid z\bar{z} = 1\}$. Równanie $z\bar{z} = 1$ w zmiennych rzeczywistych ma postać $x^2 + y^2 = 1$, czyli zadaje okrąg jednostkowy, podrozmaitość gładką w G.

Algebraiczne grupy liniowe: Są to podgrupy $H \subset GL(n, \mathbb{R})$ grupy macierzy odwracalnych, będące *zbiorami algebraicznymi* w $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ (zbiór $H \subset \mathbb{R}^m$ nazywamy algebraicznym, jeśli istnieją wielomiany $f_1, \ldots, f_k$ na $\mathbb{R}^m$ takie, że $H := \{x \in \mathbb{R}^m \mid f_1(x) = 0, \ldots, f_k(x) = 0\}$).

Lemat *Algebraiczne grupy liniowe są podgrupami Liego w $GL(n,\mathbb{R})$.*

Dowód: Niech $H := \{x \in \mathbb{R}^{n^2} \mid f_1(x) = 0, \ldots, f_k(x) = 0\} \subset GL(n,\mathbb{R})$ będzie algebraiczną grupą liniową. Rozważmy macierz Jacobiego $J[f](x) = [\frac{\partial f_i}{\partial x_j}]$ i połóżmy $r := \max_{x\in H} \operatorname{rank} J[f](x), P := \{x \in H \mid \operatorname{rank} J[f](x) = r\}$. Zauważmy, że zbiór P jest niepusty.

Skorzystajmy z „jednorodności" grupy $H \subset GL(n,\mathbb{R})$. Dokładniej, niech $y \in H$ będzie dowolnym elementem, a $x \in P$. Wtedy istnieje $h \in H$ taki, że $hx = y$. Odwzorowanie $L_h : GL(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R}), g \mapsto hg$, jest dyfeomorfizmem. Stąd $\operatorname{rank} J[f](y) = \operatorname{rank} J[f](x) = r$.

Widzimy, że rząd $J[f]$ jest stały na całym H. Z twierdzenia o stałym rzędzie wnioskujemy, że H jest powierzchnią (wymiaru $n^2 - r$). $\square$

Przykład: $G := SL(n,\mathbb{R}) = \{X \in GL(n,\mathbb{R}) \mid \det X = 1\}, T_eG = \{x \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R}) \mid \operatorname{Tr} x = 0\}$.

Przykład: $G := SL(n,\mathbb{C}) = \{X \in GL(n,\mathbb{C}) \mid \det X = 1\}$.

Przykład: $G := O(n,\mathbb{R}) = \{X \in GL(n,\mathbb{R}) \mid XX^T = I_n\}$.

Przykład: $G := SO(n,\mathbb{R}) = O(n,\mathbb{R}) \cap SL(n,\mathbb{R})$

Przykład: $G := Sp(n,\mathbb{R}) = \{X \in GL(2n,\mathbb{R}) \mid XJX^T = J\}$, tutaj $J := \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$.

Przykład: $G := U(n) = \{X \in GL(n,\mathbb{C}) \mid X\overline{X}^T = I_n\}$

Przykład: $G := SU(n) = U(n) \cap SL(n,\mathbb{C})$.

Przykład: $G := Sp(n) = \{X \in GL(n,\mathbb{H}) \mid X\overline{X}^T = I_n\}$, tutaj $GL(n,\mathbb{H})$ oznacza grupę odwracalnych macierzy $n \times n$ owyrazach kwaternionowych, a $\overline{X}$ oznacza macierz otrzymaną z macierzy X zastosowaniem *sprzężenia kwaternionowego* do każdego wyrazu: $\overline{\alpha 1 + \beta i + \gamma j + \delta k} = \alpha 1 - \beta i - \gamma j - \delta k$.

Przykład podgrupy nie będącej podgrupą Liego: Zauważmy, że podgrupa Liego $H \subset G$ jest podzbiorem *domkniętym* w grupie Liego G. Do zbudowania takiego przykładu wystarczy więc znaleźć podgrupę *niedomkniętą*.

Przykład: Grupa $(\mathbb{R},+)$ jest grupą Liego a jej podgrupa $\mathbb{Q}$ liczb wymiernych nie jest domknięta: $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.