Teoria grup I

Wykład 11

1 Reprezentacje rzeczywiste i kwaternionowe

Literatura dodatkowa: [Ada69, KM93, Tra]

Dygresja liniowo-algebraiczna

Kompleksyfikacja $V^{\mathbb{C}}$ rzeczywistej przestrzeni wektorowej V: Jest to przestrzeń wektorowa nad $\mathbb{C}$ zdefiniowana przez $V^{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$; tutaj rozumiemy $\mathbb{C}$ jako prawy $\mathbb{R}$-moduł, a V jako lewy. Jeśli $e_1, \dots, e_n$ jest bazą przestrzeni V, możemy patrzeć na $V^{\mathbb{C}}$ jako na zbiór formalnych kombinacji liniowych $\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$ o współczynnikach *zespolonych* z naturalnymi operacjami przestrzeni wektorowej. Przy tym $\alpha_i e_i$ odpowiadają tensorom prostym $\alpha_i \otimes e_i$, a wektory $e_1, \dots, e_n$ tworzą też bazę przestrzeni $V^{\mathbb{C}}$. Z tej interpretacji wnioskujemy, że $\dim_{\mathbb{C}} V^{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} V$.

Mamy też $\mathbb{R}$-izomorfizm $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V = (\mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} V \cong V \oplus iV$.

Kompleksyfikacja $L^{\mathbb{C}} : V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$ operatora liniowego $L : V \to V$: $L^{\mathbb{C}} := \mathrm{Id}_{\mathbb{C}} \otimes L$. Jeśli $[L]$ jest macierzą operatora L w bazie $e_1, \dots, e_n$, to macierz operatora $L^{\mathbb{C}}$ w tej że bazie, interpretowanej jako baza $V^{\mathbb{C}}$, będzie się pokrywała z $[L]$.

Struktura rzeczywista na przestrzeni zespolonej: Teraz spróbujmy odpowiedzieć na pytanie: *co wyróżnia przestrzenie będące kompleksyfikacjami wśród wszystkich przestrzeni zespolonych?*

Na przestrzeni $W := V^{\mathbb{C}}$ jest naturalna operacja sprzężenia $R : \alpha \otimes v \mapsto \bar{\alpha} \otimes v, \alpha \in \mathbb{C}, v \in V$. Ma ona następujące własności: 1) $R : W \to W$ jest operatorem półliniowym, czyli addytywnym oraz takim, że $R(\beta w) = \bar{\beta} R(w), \beta \in \mathbb{C}, w \in W$; 2) $R^2 = \mathrm{Id}$; 3) zbiór punktów stałych odwzorowania R pokrywa się z $V \subset V^{\mathbb{C}}$ (tutaj V jest włożone w $V^{\mathbb{C}}$ jako zbiór $\{\alpha \otimes v \mid \alpha \in \mathbb{R}, v \in V\}$).

Teraz niech W będzie dowolną przestrzenią wektorową nad $\mathbb{C}$. *Strukturą rzeczywistą* na przestrzeni W nazwiemy odwzorowanie $R : W \to W$ spełniające warunki 1), 2). Jeśli R jest takim operatorem, to zbiór $V := W^R$ jego punktów stałych ma strukturę przestrzeni wektorowej nad $\mathbb{R}$. Istotnie, V jest zamknięte ze względu na dodawanie (oczywiste, bo R addytywny) oraz ze względu na mnożenie przez skalary z $\mathbb{R}$ ($Rw = w, \beta \in \mathbb{R} \Longrightarrow R(\beta w) = \beta R w = \beta w$).

Ponadto, mamy naturalny $\mathbb{C}$-izomorfizm $W \to V^{\mathbb{C}}$. Istotnie, niech $e_1, \dots, e_n$ będzie bazą przestrzeni W^R. Wtedy $ie_1, \dots, ie_n$ jest bazą przestrzeni własnej $W_{-1} \subset W$ operatora R odpowiadającej wartości własnej -1 i mamy $W = W^R \oplus W_{-1} = W^R \oplus iW^R = \mathbb{C} \otimes W^R$. Łatwo widzieć, że izomorfizm ten nie zależy od wyboru bazy w W^R.

Jeśli $L : W \to W$ jest operatorem $\mathbb{C}$-liniowym, to $L = N^{\mathbb{C}}$ dla pewnego operatora $\mathbb{R}$-liniowego $N : V \to V$ wtedy i tylko wtedy, gdy $LR = RL$. Istotnie, ostatni warunek oznacza, że L zachowuje $V = W^R$; połóżmy $N := L|_V$. *Ćwiczenie:* dopracować szczegóły.

Urzeczywistnienie (forma rzeczywista) $V_{\mathbb{R}}$ przestrzeni zespolonej V: Ponieważ $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ możemy patrzeć na V jako na przestrzeń wektorową nad $\mathbb{R}$, którą będziemy oznaczali przez $V_{\mathbb{R}}$. Przy tym V i $V_{\mathbb{R}}$ pokrywają się jako zbiory, ale $\dim_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}} = 2\dim_{\mathbb{C}} V$. Istotnie, jeśli $e_1, \ldots, e_n$ jest bazą V, to wektory $e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_n$ tworzą bazę $V_{\mathbb{R}}$.

Forma rzeczywista $L_{\mathbb{R}}$ operatora zespolonego $L : V \to V$: Jest to operator L rozumiany jako operator $\mathbb{R}$-liniowy działający z $V_{\mathbb{R}}$ w $V_{\mathbb{R}}$. Jeśli $[L]$ jest macierzą operatora L w bazie $e_1, \ldots, e_n$, i $[L] = [L]' + i[L]''$, gdzie $[L]' := \mathrm{Re}[L], [L]'' := \mathrm{Im}[L]$ (części rzeczywista i urojona), to macierz operatora $L_{\mathbb{R}}$ w bazie $e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_n$ jest dana wzorem (*Ćwiczenie:* sprawdzić).

$$\begin{bmatrix} [L]' & -[L]'' \\ [L]'' & [L]' \end{bmatrix}.$$

Struktura zespolona na przestrzeni rzeczywistej V: A teraz pytanie: *co wyróżnia przestrzenie będące formami rzeczywistymi wśród wszystkich przestrzeni rzeczywistych?* Odpowiedzialną za takie wyróżnienie jest tzw. *struktura zespolona* na V. Jest to operator $J : V \to V$ o własności $J^2 = -\mathrm{Id}$. Operator ten jest odzwierciedleniem mnożenia przez jedynkę urojoną. Jeśli J jest takim operatorem, wprowadzamy w V strukturę przestrzeni zespolonej przez $iv := Jv, v \in V$ (dodawanie i mnożenie przez skalary rzeczywiste mamy za darmo). W szczególności, wymiar przestrzeni V nad $\mathbb{R}$ musi być parzysty.

Operator $L : V \to V$ jest forma rzeczywistą pewnego operatora zespolonego wtedy i tylko wtedy, gdy $LJ = JL$.

Najpierw kompleksyfikacja, potem urzeczywistnienie: $(V^{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}} \cong V \oplus V$ (*Ćwiczenie*).

Najpierw urzeczywistnienie, potem kompleksyfikacja: $(V_{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}} \cong V \oplus \overline{V}$ (*Ćwiczenie*); tutaj przez $\overline{V}$ oznaczamy przestrzeń *sprzężoną* do V, czyli $\mathbb{C}$-liniową przestrzeń, której struktura addytywna pokrywa się z tą z V, a mnożenie przez skalary zadane jest wzorem $\alpha * v := \bar{\alpha} v, \alpha \in \mathbb{C}, v \in V$.

Przestrzenie i operatory sprzężone: Przestrzenie sprzężone wprowadziliśmy wyżej. Niech $L : V \to W$ będzie operatorem liniowym. Ten sam operator rozumiany jako operator $V \to \overline{W}$ będziemy oznaczać L^-. Jest półliniowy: $L^-(\alpha v) = \alpha L^- v = \bar{\alpha} * L^- v$. Analogicznie definiujemy operator ${}^-L : \overline{V} \to W$ (też półliniowy), i kładziemy $\overline{L} :=^- L^- : \overline{V} \to \overline{W}$ (ostatni jest operatorem liniowym).

Algebra kwaternionów $\mathbb{H}$: Jest to algebra nad $\mathbb{R}$ generowana jako przestrzeń wektorowa przez cztery wektory $1, i, j, k$ spełniające następujące reguły mnożenia:

1. 1 jest elementem neutralnym względem mnożenia;
2. $i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k, jk = i, ki = j$.

Wnioskiem z powyższych reguł są tożsamości $ji = -k, kj = -i, ik = -j$ oraz możliwość reprezentacji kwaterniona $\alpha 1 + \beta i + \gamma j + \delta k$ w postaci $\alpha 1 + \beta i + (\gamma 1 + \delta i) j$, czyli za pomocą pary liczb zespolonych $(\alpha 1 + \beta i, \gamma 1 + \delta i)$. Inaczej, $\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} j$.

Reprezentacja macierzowa algebry $\mathbb{H}$: Łatwo się przekonać, że następujace macierze spełniają powyższe reguły względem standardowego mnożenia macierzy:

$$\mathbf{1} := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{i} := \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{j} := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{k} := \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

Wszystkie kombinacje liniowe tych macierzy o współczynnikach *rzeczywistych* będą tworzyły algebrę $\mathbb{H}$.

Prawa przestrzeń wektorowa V nad $\mathbb{H}$: Jest to *prawy moduł* nad $\mathbb{H}$ (lewy moduł daje nierównoważne pojęcie, ponieważ $\mathbb{H}$ jest nieprzemienna).

Operator $\mathbb{H}$-*liniowy* na V definiujemy jako odwzorowanie $L : V \to V$ będące morfizmem $\mathbb{H}$-modułów (czyli addytywne odwzorowanie, spełniające $L(vh) = L(v)h, v \in V, h \in \mathbb{H}$).

Forma zespolona $V_{\mathbb{C}}$ kwaternionowej prawej przestrzeni liniowej V: Ponieważ $\mathbb{C} \subset \mathbb{H}$, mamy strukturę przestrzeni $\mathbb{C}$-liniowej na V. Formę zespoloną $L_{\mathbb{C}}$ operatora $\mathbb{H}$-liniowego $L : V \to V$ definiujemy podobnie jak w przypadku formy rzeczywistej operatora zespolonego (czyli zapominamy, że jest $\mathbb{H}$-liniowy, a pamiętamy, że jest $\mathbb{C}$-liniowy).

Struktura kwaternionowa na prestrzeni zespolonej V: Jest to struktura, która wyróżnia formy zespolone przestrzeni kwaternionowych wśród przestrzeni zespolonych. Definiuje się jako operator półliniowy $H : V \to V$ o własności $H^2 = -\operatorname{Id}$ (jest odzwierciedleniem prawego mnożenia przez j). Jeśli H jest takim operatorem, wprowadzamy w V strukturę prawego $\mathbb{H}$-modułu przez $vj := Jv$ (dodawanie i mnożenie przez skalary zespolone już mamy). W szczególności, wymiar przestrzeni V nad $\mathbb{C}$ musi być parzysty.

Można pokazać, że operator $L : V \to V$ jest formą zespoloną wtedy i tylko wtedy, gdy $LH = HL$.

Jak to się przekłada na reprezentacje

Struktura rzeczywista $R : W \to W$ na reprezentacji zespolonej $\rho : G \to GL(V)$: Jest to struktura rzeczywista na przestrzeni zespolonej V, będąca operatorem *splatającym* dla ρ. Z powyższych rozważań wnioskujemy, że $W = V^{\mathbb{C}}$, gdzie $V := W^R$, oraz, że istnieje taka reprezentacja rzeczywista $\tau : G \to GL(V)$, ze $\rho(g) = \tau(g)^{\mathbb{C}}$ dla każdego $g \in G$.

Reprezentacja kwaternionowa grupy G w prawej przestrzeni kwaternionowej V: Jest to homomorfizm grup $\zeta : G \to GL_{\mathbb{H}}(V)$, gdzie przez $GL_{\mathbb{H}}(V)$ oznaczyliśmy grupę odwracalnych $\mathbb{H}$-liniowych odwzorowań z V w V.

Struktura kwaternionowa $H : V \to V$ na reprezentacji zespolonej $\rho : G \to GL(V)$: Jest to z kolei struktura kwaternionowa na przestrzeni zespolonej V, będąca operatorem *splatającym* dla ρ. Możemy wprowadzić strukturę prawej $\mathbb{H}$-przestrzeni liniowej na V oraz pokazać, że istnieje reprezentacja kwaternionowa $\zeta : G \to GL_{\mathbb{H}}(V)$ taka, że $\rho(g) = \zeta(g)_{\mathbb{C}}$ dla dowolnego $g \in G$.

Reprezentacja sprzężona do reprezentacji zespolonej $\rho : G \to GL(V)$: Jest to reprezentacja $\overline{\rho} : G \to GL(\overline{V})$ w przestrzeni $\overline{V}$ zadana wzorem $\overline{\rho}(g) := \overline{\rho(g)}, g \in G$. Reprezentacje ρ i $\overline{\rho}$, na pozór jednakowe, mogą być nie równoważne. Istotnie, operator $v \mapsto v : V \to \overline{V}$ (czyli Id^-) jest operatorem splatającym pomiędzy ρ i $\overline{\rho}$, ale nie jest liniowy (jest półliniowy). Ale może też istnieć nietrywialny operator liniowy splatający, realizujący równoważność ρ i $\overline{\rho}$.

Lemat *Niech ρ będzie reprezentacją nieprzywiedlną i równoważną z $\overline{\rho}$ i niech $C : V \to \overline{V}$ będzie (liniowym) operatorem splatającym, realizującym tę równoważność. Wtedy C jest określony z dokładnością do czynnika liczbowego, który można wybrać tak, żeby $C^- : V \to V$ było strukturą rzeczywistą lub kwaternionową.*

Dowód: Niech $C' : V \to \overline{V}$ będzie innym operatorem splatającym, realizującym równoważność. Wtedy $C^{-1}C' : V \to V$ jest operatorem splatającym (pomiędzy ρ i ρ) i według lematu Schura musi być postaci $\lambda \operatorname{Id}$ dla pewnego $\lambda \in \mathbb{C}$. Mamy więc $C' = \lambda C$. Zauważmy, że operator $\overline{C} : \overline{V} \to \overline{\overline{V}} = V$ jest operatorem splatającym (pomiędzy $\overline{\rho}$ i ρ), stąd możemy położyć $C' := (\overline{C})^{-1}$ i dostać $(\overline{C})^{-1} =$

λC. Mamy więc $C\overline{C} = (1/\lambda)\,\mathrm{Id}, \overline{C}C = (1/\bar{\lambda})\,\mathrm{Id}$. Ponieważ $\mathrm{Tr}(C\overline{C}) = \mathrm{Tr}(\overline{C}C)$, skalar λ musi być rzeczywisty. Teraz zauważmy, że $\overline{C}C = (C^-)(C^-)$. Zastępując C przez $\sqrt{\lambda}C$ w przypadku $\lambda > 0$ lub przez $i\sqrt{|\lambda|}$ w przypadku $\lambda < 0$, otrzymujemy wynik. $\square$

Typy reprezentacji: Mówimy, że reprezentacja zespolona ρ jest *typu*

1. *zespolonego*, jeśli ρ i $\overline{\rho}$ nie są równoważne;
2. *rzeczywistego*, jeśli są równoważne i C^- po przeskalowaniu jest struktura rzeczywista;
3. *kwaternionowego*, jeśli są równoważne i C^- po przeskalowaniu jest struktura kwaternionowa.

TWIERDZENIE *(Frobeniusa–Schura) Niech χ będzie charakterem nieprzywiedlnej zespolonej reprezentacji $\rho : G \to GL(V)$ skończonej grupy G i niech*

$$x := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g^2)$$

Wtedy

1. *$x = 0 \iff \rho$ jest typu zespolonego;*
2. *$x = 1 \iff \rho$ jest typu rzeczywistego;*
3. *$x = -1 \iff \rho$ jest typu kwaternionowego.*

Dowod: zob. [Tra].

PRZYKŁAD: Rozważmy naturalną 1-wymiarową reprezentację grupy cyklicznej $C_n = \{e, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$ o charakterze $\chi, \chi(a^j) = \epsilon^j, \epsilon := e^{i2\pi/n}$. Reprezentacja ta nie może byc typu kwaternionowego, bo wymiar przestrzeni jest nieparzysty.

Z kolei, żeby reprezentacja ta była typu rzeczywistego wartości własne wszystkich operatorów reprezentacji muszą być rzeczywiste. To sugeruje, że ta reprezentacja jest typu rzeczywistego tylko w przypadku $n = 2$. Istotnie, w tym przypadku $x = (1/2)(\chi(e^2) + \chi(a^2)) = (1/2)(\chi(e) + \chi(e)) = 1$.

Dla $n = 3$ mamy $x = (1/3)(\chi(e^2)+\chi(a^2)+\chi(a^4)) = (1/3)(\chi(e)+\chi(a^2)+\chi(a)) = (1/3)(1+\epsilon^2+\epsilon) = 0$.

Dla $n = 4$: $x = (1/4)(\chi(e^2) + \chi(a^2) + \chi(a^4) + \chi(a^6)) = (1/4)(\chi(e) + \chi(a^2) + \chi(e) + \chi(a^2)) = (1/4)(1 + (-1) + 1 + (-1)) = 0$.

Ćwiczenie: Jak jest dla dowolnego n?

Literatura

[Ada69] J. Frank Adams, *Lectures on Lie groups*, Benjamin, 1969.

[KM93] A. I. Kostrikin and J. I. Manin, *Algebra liniowa i geometria*, PWN, 1993.

[Tra] Andrzej Trautman, *Grupy oraz ich reprezentacje*, Skrypt do wykładu, dostępne na http://www.fuw.edu.pl/~amt.