Teoria grup I

Wykład 10

1 Reprezentacje indukowane, cz. II

Literatura dodatkowa: [Ser88, CR88]

Reprezentacje indukowane: Niech $H \subset G$ będzie podgrupą grupy skończonej G i niech $W \subset V$ będą takimi przestrzeniami wektorowymi, że G działa liniowo na V (czyli mamy homomorfizm $\rho : G \to GL(V)$) i

$$HW \subset W \tag{1}$$

(czyli $\rho(H)W \subset W$). Łatwo się przekonać, że podprzestrzeń $sW \subset V$ zależy tylko od prawej warstwy $sH = \{sh \mid h \in H\}$ elementu $s \in G$ ze względu na podgrupę H, a nie zależy od wyboru reprezentanta s danej warstwy. Istotnie, $(sh)W = s(hW) = sW$.

Niech $R \subset G$ oznacza zbiór reprezentantów warstw (każda warstwa jest reprezentowana jedynym reprezentantem[1]). Suma $\sum_{s\in G} sW = \sum_{r\in R} rW \subset V$ jest podprzestrzenią niezmienniczą ze względu na działanie grupy G.

Jeśli

$$\sum_{r\in R} rW = V \tag{2}$$

i , ponadto, jest to suma prosta, czyli

$$rW \cap r'W = \{0\}, \tag{3}$$

gdzie r, r' reprezentują różne warstwy, mówimy, że reprezentacja V grupy G jest *indukowana* przez reprezentację W podgrupy H.

LEMAT *Istnieje jedyna (z dokładnością do równoważności) reprezentacja grupy G indukowana przez zadaną reprezentację podgrupy H w przestrzeni W.*

Dowód: Rozważmy reprezentację W jako lewy $\mathbb{C}[H]$-moduł, a algebrę grupową $\mathbb{C}[G]$ jako prawy $\mathbb{C}[H]$-moduł (ostatnie jest możliwe, ponieważ każda algebra A może być rozpatrywana jako lewy i prawy moduł nad dowolną swoją podalgebrą $B \subset A$). Teraz możemy rozpatrzeć grupę abelową $V := \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W$. Co więcej, można je rozpatrywać jako lewy $\mathbb{C}[G]$-moduł, czyli reprezentację grupy G.

Warunek (1) dla tej reprezentacji V wynika z tego, że przestrzeń W jest włożona w V jako $\mathbb{C}[H]$-podmoduł[2]. Włożenie takie realizuje się wzorem $W \ni w \mapsto 1 \otimes w \in 1 \otimes W = \{1 \otimes w \mid w \in W\} \subset V$.

[1] Umówmy się, ze warstwa H jest reprezentowana przez e

[2] Podmodułem modułu V nad algebrą A nazywamy podgrupę $W \subset V$ stabilną ze względu na działanie A, czyli taką, że $AW \subset W$

Istotnie, dla $h \in \mathbb{C}[H], w \in W$ mamy $h(1 \otimes w) = (h1) \otimes w = (1h) \otimes w = 1 \otimes hw$, czyli włożenie $w \mapsto 1 \otimes w$ jest morfizmem $\mathbb{C}[H]$-modułów.

Warunek (2) z kolei jest wnioskiem z faktu, że grupa G jest sumą teoretyko-mnogościową warstw sH. Istotnie, ostatni warunek oznacza rozkład $\mathbb{C}[G] = \sum_{r \in R} \mathbb{C}[rH]$, gdzie oznaczyliśmy przez $\mathbb{C}[rH]$ powłokę liniową (nad $\mathbb{C}$) warstwy rH, a sumę rozumiemy w sensie teorii przestrzeni liniowych. Powyższy rozkład daje rozkład $V = \sum_{r \in R} \mathbb{C}[rH] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W = \sum_{r \in R} r\mathbb{C}[H] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W = \sum_{r \in R} r \otimes_{\mathbb{C}[H]} W$.

Wreszcie zauważmy, że różne warstwy mają puste przecięcie, co oznacza, że w powyższych wzorach możemy zastąpić znak sumy znakiem sumy prostej, co daje warunek (3).

Zostało pokazać jednoznaczność. W tym celu rozważmy dowolną G-reprezentację V' indukowaną przez H-reprezentację W i skorzystajmy z rozkładu $V' = \bigoplus_{r \in R} rW$. Odwzorowanie $F : V' \to V$ zadajemy wzorem $rw \mapsto r \otimes w$ dla $w \in W, r \in R$. Jest to liniowa (nad $\mathbb{C}$) injekcja, a obliczenie wymiarów V i V' pokazuje, że jest to też i bijekcja. Łatwo widać też, że jest to morfizm $\mathbb{C}[G]$-modułów. $\square$

Charakter reprezentacji $\rho : G \to GL(V)$ indukowanej przez H-reprezentację W:

TWIERDZENIE *Niech $\chi_W : H \to \mathbb{C}$ będzie charakterem reprezentacji W. Wtedy*

$$\chi_\rho(x) = \frac{1}{|H|} \sum_{g \in G, g^{-1}xg \in H} \chi_W(g^{-1}xg).$$

Dowód: Każdy element $x \in G$ wyznacza automorfizm $\rho(x)$ przestrzeni $V = \bigoplus_{r \in R} rW$, który przestawia podprzestrzenie rW. Dla każdego $r \in R$ wybierzemy bazę $\{e(r)_1, \ldots, e(r)_w\}$ przestrzeni rW taką, że $\{e(r)_1, \ldots, e(r)_w\}_{r \in R}$ jest bazą V. Na diagonali macierzy automorfizmu $\rho(x)$ w tej bazie niezerowe wyrazy będą odpowiadały tylko tym elementom $e(r)_i$, dla których $xrW = rW$, czyli $xr \in rH$, czyli $r^{-1}xr \in H$.

Stąd $\operatorname{Tr} \rho(x) = \sum_{r \in R, r^{-1}xr \in H} \operatorname{Tr}(\rho(x)|_{rW})$. Z innej strony, przemienny diagram

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\rho(r^{-1}xr)"] \arrow[d, "\rho(r)"'] & W \arrow[d, "\rho(r)"] \\ rW \arrow[r, "\rho(x)"] & rW \end{tikzcd}$$

pokazuje, że $\operatorname{Tr}(\rho(x)|_{rW}) = \operatorname{Tr}(\rho(r^{-1}xr)|_W) = \chi_W(r^{-1}xr)$. Mamy więc

$$\chi_\rho(x) = \sum_{r \in R, r^{-1}xr \in H} \chi_W(r^{-1}xr).$$

Teraz zauważmy, że dla wszystkich $g \in rH$ ($g = rh$ dla pewnego $h \in H$) mamy równoważność $g^{-1}xg \in H \iff h^{-1}r^{-1}xrh \in H \iff r^{-1}xr \in H$ oraz, w założeniu, że $r^{-1}xr \in H$, równość $\chi_W(g^{-1}xg) = \chi_W(h^{-1}r^{-1}xrh) = \chi_W(r^{-1}xr)$ (bo $\chi_W \in \mathrm{Cl}(H)$). Stąd teza. $\square$

Wzorując na wzorze z twierdzenia połóżmy dla dowolnej $F \in \mathrm{Cl}(H)$

$$\mathrm{Ind}F(x) := \frac{1}{|H|} \sum_{g \in G, g^{-1}xg \in H} F(g^{-1}xg).$$

Wzór wzajemności Frobeniusa:

Twierdzenie *Niech* $F \in \mathrm{Cl}(H), S \in \mathrm{Cl}(G)$. *Oznaczmy* $\mathrm{Res}S := S|_H$. *Wtedy*

$$(F|\mathrm{Res}S)_H = (\mathrm{Ind}F|S)_G.$$

Dowód: Korzystając z własności charakteru $\overline{\chi(g)} = \chi(g^{-1})$ mamy

$$(\mathrm{Ind}F|S)_G = \frac{1}{|G||H|}\sum_{x\in G}\sum_{g\in G, g^{-1}xg\in H}\overline{F(g^{-1}xg)}S(x) =$$

$$\frac{1}{|G||H|}\sum_{x,g\in G, g^{-1}xg\in H} F(g^{-1}x^{-1}g)S(x).$$

Podstawiając do ostatniego wyrażenia $y^{-1} = g^{-1}x^{-1}g$ otrzymujemy

$$(\mathrm{Ind}F|S)_G = \frac{1}{|G||H|}\sum_{g\in G, y\in H} F(y^{-1})S(gyg^{-1}) =$$

$$\frac{1}{|G||H|}\sum_{g\in G, y\in H}\overline{F(y)}S(y) = \frac{1}{|H|}\sum_{y\in H}\overline{F(y)}S(y) = (F|\mathrm{Res}S)_H.\square$$

Przykład: Grupa T ostrosłupa: Grupa T obrotów ostrosłupa foremnego jest izomorficzna z A_4 i ma następujące klasy sprzężoności:

K_1	1
K_2	(12)(34),(13)(24),(14)(23)
K_3	(123),(214),(314),(432)
K_4	(132),(241),(314),(423)

Suma $K_1 \cup K_2$ jest komutantem T' grupy T, który jest izomorficzny z D_2. Iloraz T/T' ma 3 elementy, jest więc izomorficzny z C_3. Mamy trzy reprezentacje nieprzywiedlne 1-wymiarowe pochodzące z reprezentacji C_3:

	K_1	K_2	K_3	K_4
V_1	1	1	1	1
V_2	1	1	ϵ	ϵ^2
V_3	1	1	ϵ^2	ϵ

Z rozkładu reprezentacji regularnej wnioskujemy, że brak nam jeszcze jednej reprezentacji 3-wymiarowej albo dziewięciu 1-wymiarowych. Ostatnia możliwość nie zachodzi, ponieważ grupa, której wszystkie nieprzywiedlne reprezentacje są 1-wymiarowe jest abelowa (*Ćwiczenie*). Łatwo pokazać, że brakująca reprezentacja 3-wymiarowa V jest reprezentacją naturalną grupy T w przestrzeni 3-wymiarowej.

Spójrzmy na tę reprezentację z punktu widzenia reprezentacji indukowanych. Oznaczmy elementy grupy T' przez e, a, b, c i rozważmy 1-wymiarowa reprezentację ρ' podgrupy $H = T'$ taką, że $\rho'(a) = -1, \rho'(b) = -1$ oraz indukowaną reprezentację V o charakterze $\chi_V = \mathrm{Ind}\chi_{\rho'}$. Wtedy $(\chi_{\rho'}|\mathrm{Res}\chi_{V_i})_H = 0$ (bo $\chi_{\rho'} = \rho', \rho'(e) = 1, \rho'(a) = -1, \rho'(b) = -1, \rho'(c) = 1, \mathrm{Res}\chi_{V_i}(e) = \mathrm{Res}\chi_{V_i}(a) = \mathrm{Res}\chi_{V_i}(b) = \mathrm{Res}\chi_{V_i}(c) = 1$). Ze wzoru wzajemności Frobeniusa mamy też $(\chi_V|\chi_{v_i})_G = 0$. Stąd żadna z reprezentacji V_i nie wchodzi do V, co pokazuje nieprzywiedlność ostatniej. Istotnie, V jest 3-wymiarowa (bo $|G/H| = |T/T'| = 3$). Gdyby była przywiedlna, musiałaby zawierać niezmienniczą podprzestrzeń 1-wymiarową, która, z kolei, musiałaby być izomorficzną z jedną z V_i. *Ćwiczenie:* obliczyć charakter reprezentacji V na dwa sposoby: 1) z tabelki charakterów; 2) korzystając ze wzoru na charakter reprezentacji indukowanej.

Literatura

[CR88] Charles W. Curtis and Irving Reiner, *Representation theory of finite groups and associative algebras*, John Wiley and Sons, 1988.

[Ser88] Jean-Pierre Serre, *Reprezentacje liniowe grup skończonych*, PWN, 1988.