Teoria grup II

Wykład 9

1 Podalgebry Cartana i rozkład na podprzestrzenie pierwiastkowe. Cz. II

Literatura dodatkowa: [Hel00]

PRZYKŁAD: Niech $\mathfrak{g} := \mathfrak{so}(2n, \mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{C}) \mid X + X^T = 0\} =: \mathfrak{d}_n$ oraz $H_1 := E_{12} - E_{21}, H_2 = E_{34} - E_{43}, \ldots, H_n := E_{2n-1,2n} - E_{2n,2n-1}$, czyli $H_i := E_{2i-1,2i} - E_{2i,2i-1}, i = 1, \ldots, n$. Oznaczmy też $F_{ij} := E_{ij} - E_{ji}$ oraz

$$G^+_{jk} := F_{2j-1,2k-1} + F_{2j,2k} + i(F_{2j-1,2k} - F_{2j,2k-})$$

$$G^-_{jk} := F_{2j-1,2k-1} - F_{2j,2k} + i(F_{2j-1,2k} + F_{2j,2k-}),$$

gdzie $j, k \in \{1, \ldots, n\}, j \neq k$. Na przykład dla $n = 2$ mamy:

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, G^+_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ -1 & i & 0 & 0 \\ -i & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, G^-_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & i & -1 \\ -1 & -i & 0 & 0 \\ -i & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G^+_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & i \\ 0 & 0 & -i & -1 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ -i & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, G^-_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & i \\ 0 & 0 & i & 1 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ -i & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bezpośrednio sprawdzają się (*Ćwiczenie*) wzory

$$[H, G^+_{jk}] = (e_j(H) - e_k(H))G^+_{jk} \quad (1 \leq j \neq k \leq n)$$

$$[H, G^-_{jk}] = -(e_j(H) + e_k(H))G^-_{jk} \quad (1 \leq j < k \leq n)$$

$$[H, G^-_{jk}] = (e_j(H) + e_k(H))G^-_{jk} \quad (1 \leq k < j \leq n),$$

gdzie $e_j(H_k) = -i\delta_{jk}$. Stad widzimy, że podalgebrą Cartana jest

$$\mathfrak{h} := \sum_i \mathbb{C}H_i,$$

a rozkład na podprzestrzenie pierwiastkowe wygląda tak:

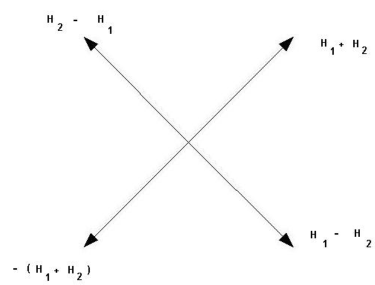
$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{j \neq k} \mathbb{C} G_{jk}^{+} + \sum_{j \neq k} \mathbb{C} G_{jk}^{-}.$$

Teraz możemy obliczyć formę Killinga: $B_{\mathfrak{g}}(H,H) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_H^2) = \sum_{j\neq k}((e_j(H) - e_k(H))^2 + (e_j(H) + e_k(H))^2) = 2\sum_{j\neq k}(e_j(H)^2 + e_k(H)^2) = 4\sum_{j<k}(e_j(H)^2 + e_k(H)^2) = 4(n-1)\sum_{i=1}^{n} e_i(H)^2 = 2(n-1)\,\mathrm{Tr}(H^2)$. Prawie każdy element z $\mathfrak{g}$ jest sprzężony do pewnej macierzy z $\mathfrak{h}$ (przyjmujemy to bez dowodu). Stąd wnioskujemy (podobnie jak to robiliśmy dla $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$), że $B_{\mathfrak{g}}(X,Y) = (2n-2)\,\mathrm{Tr}(XY)$ i, że $\mathfrak{g}$ jest półprosta.

Pierwiastki są dane przez

$$e_i - e_j \ (1 \leq i,j \leq n), \ \pm(e_i + e_k) \ (1 \leq j < k \leq n).$$

Rozważmy przestrzeń $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} := \sum_i \mathbb{R} H_i$. W przypadku $n = 2$ jest to 2-wymiarowa przestrzeń rzeczywista, a układ pierwiastków wygląda w niej następująco:



Przykład: Niech $\mathfrak{g} := \mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2n+1,\mathbb{C}) \mid X + X^T = 0\} =: \mathfrak{b}_n$. Podalgebrę Cartana określamy jak wcześniej $\mathfrak{h} := \sum_{i=1}^{n} \mathbb{C} H_i$. Wprowadźmy dodatkowo macierze

$$D_j^{\pm} := F_{2j-1,2n+1} \pm i F_{2j,2n+1} \ (1 \leq j \leq n).$$

Na przykład dla $n = 2$ mamy

$$D_1^{\pm} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pm i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \mp i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_2^{\pm} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pm i \\ 0 & 0 & -1 & \mp i & 0 \end{bmatrix}.$$

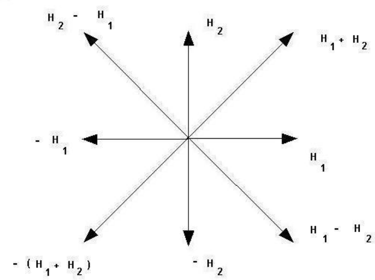
Sprawdzamy (*Ćwiczenie*), że $[H, D_j^{\pm}] = \mp e_j(H) D_j^{\pm}$. Stąd mamy rozkład na podprzestrzenie pierwiastkowe

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{j \neq k} \mathbb{C} G_{jk}^{+} + \sum_{j \neq k} \mathbb{C} G_{jk}^{-} + \sum_{j=1}^{n} \mathbb{C} D_j^{+} + \sum_{j=1}^{n} \mathbb{C} D_j^{-}.$$

Argumenty podobne do powyższych pokazują, że $B_{\mathfrak{g}}(X,Y) = (2n-1)\,\mathrm{Tr}(XY)$ oraz, że $\mathfrak{g}$ jest półprosta. Pierwiastki są dane przez

$$\pm e_i \ (1 \leq i \leq n), \ e_i - e_j \ (1 \leq i,j \leq n), \ \pm(e_i + e_k) \ (1 \leq j < k \leq n),$$

a dla $n = 2$ w przestrzeni $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ wyglądają tak:



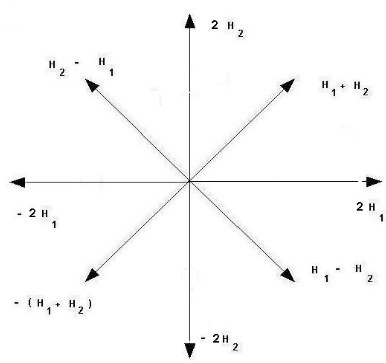
Przykład Niech $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{C}) \mid XJ + JX = 0\} =: \mathfrak{c}_n$, tutaj $J := \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$ jest macierzą $2n \times 2n$. (*Ćwiczenie:* sprawdź, że macierze z $\mathfrak{g}$ mają postać $\begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{bmatrix}$, gdzie $A, B, C \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, przy czym B, C symetryczne). Podalgebra Cartana ma postać $\mathfrak{h} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{C}H_i$, gdzie $H_i := E_{ii} - E_{n+i,n+i}$, pierwiastki dane są wzorem $e_i(H_j) = \delta_{ij}$. Rozkład na podprzestrzenie pierwiastkowe jest następujący

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{i \leq j} \mathbb{C}(E_{n+i,j} + E_{n+j,i}) + \sum_{i \leq j} \mathbb{C}(E_{i,n+j} + E_{j,n+i}) + \sum_{i \leq j} \mathbb{C}(E_{ij} - E_{n+j,n+i}).$$

Forma Killinga ma postać $B_{\mathfrak{g}}(X, Y) = (2n + 2)\operatorname{Tr}(XY)$, a układ pierwiastków

$$\pm e_i \ (1 \leq i \leq n), \ \pm e_i \pm e_j \ (1 \leq i < j \leq n).$$

Dla $n = 2$ mamy (w $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$)



Forma Killinga w tym przypadku ma postać $B_{\mathfrak{g}}(X, Y) = (2n + 2)\operatorname{Tr}(XY)$.

Dowód twierdzenia z poprzedniego wykładu: Ad. 1. Wykażemy, że suma $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}^{\alpha}$ jest prosta. Niech $H' \in \mathfrak{h}, X_{\alpha_i} \in \mathfrak{g}^{\alpha_i}$ (pierwiastki α_i są różne i niezerowe) będą takie, że $H' + \sum_i X_{\alpha_i} = 0$. Wtedy można wybrać $H \in \mathfrak{h}$ tak, żeby $\alpha_i(H)$ były liczbami różnymi i niezerowymi (bo zbiór takich $H \in \mathfrak{h}$, że któreś $\alpha_i(H)$ są zerowe lub pokrywają się, jest sumą skończonej liczby hiperpłaszczyzn). Stąd wnioskujemy, że H', X_{α_i} leżą w podprzestrzeniach własnych endomorfizmu ad_H odpowiadających różnym wartościom własnym, czyli są liniowo niezależne.

Ad. 3. Niech $X \in \mathfrak{g}^{\alpha}, Y \in \mathfrak{g}^{\beta}, \alpha + \beta \neq 0$. Wtedy dla dowolnego pierwiastka γ endomorfizm $\operatorname{ad}_X \operatorname{ad}_Y$ odwzorowuje $\mathfrak{g}^{\gamma}$ w $\mathfrak{g}^{\alpha+\beta+\gamma}$ oraz $\mathfrak{g}^{\gamma} \cap \mathfrak{g}^{\alpha+\beta+\gamma} = \{0\}$. Wybierzmy teraz bazę w $\mathfrak{g}$, każdy element której leży w pewnym $\mathfrak{g}^\gamma$. W takiej bazie macierz $\mathrm{ad}_X \mathrm{ad}_Y$ będzie miała zerowe elementy na diagonali, czyli $B_{\mathfrak{g}}(X,Y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_X \mathrm{ad}_Y) = 0$.

Ad. 4. Niech $H_0 \in \mathfrak{h}$ będzie takie, że $B_{\mathfrak{g}}(H_0, H) = 0$ dla dowolnego $H \in \mathfrak{h}$. Wtedy punkt 3 pokazuje, że $B_{\mathfrak{g}}(H_0, X) = 0$ dla dowolnego $X \in \mathfrak{g}$. Ponieważ z definicji $B_{\mathfrak{g}}$ jest niezdegenerowana, mamy $H_0 = 0$.

Literatura

[Hel00] Sigudur Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, AMS, 2000.