Teoria grup II

Wykład 8

1 Podalgebry Cartana i rozkład na podprzestrzenie pierwiastkowe. Cz. I

Literatura dodatkowa: [Hel00]

W tym wykładzie będziemy zakładać, że $\mathfrak{g}$ jest półprostą algebrą Liego nad $\mathbb{C}$. Naszym celem jest badanie struktury takich algebr.

Podalgebra Cartana $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$: Jest to podalgebra Liego o własnościach: 1) $\mathfrak{h}$ jest maksymalna abelową podalgebrą Liego w $\mathfrak{g}$ (czyli każda abelowa podalgebra $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{g}$ zawierająca $\mathfrak{h}$ pokrywa się z $\mathfrak{h}$); 2) dla dowolnego $X \in \mathfrak{h}$ endomorfizm $\mathrm{ad}_X \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ jest półprosty (= diagonalizowalny).

Okazuje się, że w każdej półprostej $\mathfrak{g}$ istnieje podalgebra Cartana (zob. twierdzenie poniżej) oraz że każde dwie podalgebry Cartana $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ są „sprzężone", czyli istnieje $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ takie, że $\sigma\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2$.

Elementy regularne a podalgebry Cartana: Niech $H \in \mathfrak{g}$, oznaczmy $\mathfrak{g}(H, \lambda) := \{X \in \mathfrak{g} \mid (\mathrm{ad}_H - \lambda\,\mathrm{Id})^k X = 0$ dla pewnego $k\}$. Przestrzeń $\mathfrak{g}(H, \lambda)$ jest zerowa, jeśli λ nie należy do spektrum ad_H, lub pokrywa się z przestrzenią pierwiastkową endomomorfizmu ad_H, jeśli λ jest jedną z wartości własnych.

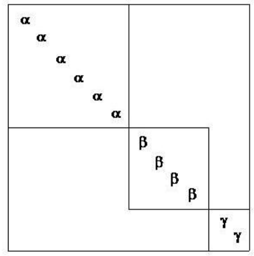
Element $H \in \mathfrak{g}$ nazywamy *regularnym*, jeśli

$$\dim \mathfrak{g}(H, 0) = \min_{X \in \mathfrak{g}} \dim \mathfrak{g}(X, 0).$$

Zauważmy, że przestrzeń $\mathfrak{g}(H, 0)$ zawiera podalgebrę $\mathfrak{g}_H := \{X \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{ad}_X H = 0\}$ będącą algebrą Liego stabilizatora $G_H := \{x \in G \mid \mathrm{Ad}_x H = H\}$ elementu H względem działania dołączonego. Jeśli ad_H jest półprosty, rozkład Jordana pokazuje, że $\mathfrak{g}(H, 0) = \ker \mathrm{ad}_H = \mathfrak{g}_H$.

Przykład: Niech $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, a $H \in \mathfrak{g}$ będzie macierzą diagonalną. Wtedy ad_H będzie endomorfizmem półprostym. Istotnie, macierze $H_{12} := E_{11} - E_{22}, H_{23} := E_{22} - E_{33}, \ldots, H_{n-1,n} := E_{n-1,n-1} - E_{nn}$ tworzą bazę przestrzeni $\mathfrak{h}$ macierzy diagonalnych bezśladowych i H można wyrazić jako kombinację liniową tych macierzy. Z drugiej strony $\mathrm{ad}_{H_{ij}}$ jest diagonalny w bazie $H_{i'j'}, E_{kl}, k \neq l$: $[H_{ij}, H_{i'j'}] = 0, [H_{ij}, E_{ij}] = 2E_{ij}, [H_{ij}, E_{ji}] = -2E_{ji}, [H_{ij}, E_{ij'}] = E_{ij'}, j' \neq j, [H_{ij}, E_{i'j}] = -E_{i'j}, i' \neq i$.

Stąd $\mathfrak{g}(H, 0) = \mathfrak{g}_H$. Niech teraz H_0, ma spektrum proste (czyli nie ma krotnych wartości własnych). Łatwo widzieć, że wtedy $\mathfrak{g}_H = \mathfrak{h}$. W przypadku, gdy H ma krotności w spektrum, algebra $\mathfrak{g}_H$ jest większa, jak to ilustruje następujący rysunek:



Ćwiczenie: pokaż, że $\dim \mathfrak{g}(H,0) = \dim \mathfrak{g}_H = n-1$ jest minimalnym możliwym wymiarem, czyli H jest elementem regularnym w przypadku prostego spektrum (*skorzystaj z rozkładu Jordana*). W ogólności jest prawdziwe następujące twierdzenie, które przyjmujemy bez dowodu.

TWIERDZENIE *Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą półprostą nad $\mathbb{C}$, a $H_0 \in \mathfrak{g}$ będzie elementem regularnym. Wtedy $\mathfrak{g}(H_0,0)$ jest podalgebrą Cartana w $\mathfrak{g}$.*

Pierwiaski i podprzestrzenie pierwiaskowe:

LEMAT *Niech $A, B \in \mathrm{End}(V)$ będą półprostymi komutującymi endomorfizmami przestrzeni liniowej V. Wtedy A i B są jednocześnie diagonalizowalne, czyli istnieje baza przestrzeni V składająca się z wektorów własnych operatorów A i B.*

Dowód: Niech $v \in V$ będzie wektorem własnym operatora A odpowiadającym wartości własnej λ: $Av = \lambda v$. Wtedy Bv też jest wektorem własnym operatora A odpowiadającym wartości własnej λ: $ABv = BAv = B\lambda v = \lambda Bv$. Stąd podprzestreń własna $V' := V(A,\lambda) = \{v \in V \mid Av = \lambda v\}$ operatora A jest podprzestrzenią niezmienniczą operatora B. Ograniczenie $B|_{V'}$ jest operatorem diagonalizowalnym, czyli istnieje baza przestrzeni V', w której $B|_{V'}$ jest diagonalny. W tej że bazie $A|_{V'}$ jest skalarny. Wybierając podobne bazy we wszystkich przestrzeniach własnych operatora A, otrzymujemy wynik. $\square$

W dalszej części wykładu $\mathfrak{h}$ będzie oznaczało ustaloną podalgebrę Cartana w $\mathfrak{g}$.

Zauważmy, że operatory $\mathrm{ad}_H, H \in \mathfrak{h}$, są diagonalizowalne i komutujące, skąd wnioskujemy, że w $\mathfrak{g}$ istnieje baza złożona z wektorów własnych wszystkich operatorów ad_H. Niech $X \in \mathfrak{g}$ będzie elementem takiej bazy. Wtedy $\mathrm{ad}_H X = \alpha(H)X$, gdzie $\alpha(H)$ odpowiednia wartość własna. Okazuje się, że α *liniowo* zależy od H. Istotnie, $\alpha(\beta_1 H_1 + \beta_2 H_2)X = \mathrm{ad}_{\beta_1 H_1 + \beta_2 H_2} X = \beta_1 \mathrm{ad}_{H_1} X + \beta_2 \mathrm{ad}_{H_2} X = (\beta_1 \alpha(H_1) + \beta_2 \alpha(H_2))X$.

Niech teraz $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ będzie dowolnym funkcjonałem liniowym na $\mathfrak{h}$. Oznaczmy

$$\mathfrak{g}^\alpha := \{X \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{ad}_H X = \alpha(H)X \ \forall H \in \mathfrak{h}\}.$$

Funkcjonał α nazywamy *pierwiastkiem* $\mathfrak{g}$ względem $\mathfrak{h}$, jeśli $\mathfrak{g}^\alpha \neq \{0\}$ (a odpowiednie $\mathfrak{g}^\alpha$ nazywamy *podprzestrzenią pierwiastkową*).

LEMAT

1. *$\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h}$;*
2. *dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$ mamy $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta] \subset \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$.*

Dowód: Ad. 1. Mamy $\mathfrak{g}^0 = \{X \in \mathfrak{g} \mid [\mathfrak{h}, X] = 0\}$, czyli $\mathfrak{g}^0$ składa się z elementów $\mathfrak{g}$ komutujących z $\mathfrak{h}$. Ale $\mathfrak{h}$ z definicji jest maksymalną podalgebrą abelową, czyli takie elementy leża jedynie w $\mathfrak{h}$.
Ad. 2. niech $X \in \mathfrak{g}^\alpha, Y \in \mathfrak{g}^\beta$. Wtedy $\mathrm{ad}_H[X,Y] = [\mathrm{ad}_H X, Y] + [X, \mathrm{ad}_H Y] = (\alpha(H) + \beta(H))[X,Y]$ dla dowolnego $H \in \mathfrak{h}$, skąd $[X,Y] \in \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$. $\Box$

Niech $\Delta \subset \mathfrak{h}^*$ oznacza zbiór *niezerowych* pierwiastków.

Twierdzenie *1.* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}^\alpha$ *(suma prosta podprzestrzeni).*

2. $\dim \mathfrak{g}^\alpha = 1$ *dla każdego* $\alpha \in \Delta$.

3. Niech α, β *będą dwoma pierwiastkami o własności* $\alpha + \beta \neq 0$. *Wtedy* $B_\mathfrak{g}(\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta) = 0$.

4. Ograniczenie $B_\mathfrak{g}|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ *jest niezdegenerowane. W szczególności dla każdego* $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ *istnieje jedyny element* $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ *taki, że* $B_\mathfrak{g}(H, H_\alpha) = \alpha(H)$ *dla wszystkich* $H \in \mathfrak{h}$.

5. Jeśli $\alpha \in \Delta$, *to* $-\alpha \in \Delta$ *oraz*

$$[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}] = \mathbb{C}H_\alpha,$$

przy czym $\alpha(H_\alpha) \neq 0$.

Dowód w następnym Wykładzie.

Przykład: Niech $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C}) =: \mathfrak{a}_n$ oraz $H_i := E_{ii} - E_{i+1,i+1}, i = 1, \ldots, n$. Wtedy $\mathfrak{h} = \sum_i \mathbb{C}H_i$ (algebra diagonalnych macierzy bezśladowych) oraz

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{i\neq j} \mathbb{C}E_{ij}.$$

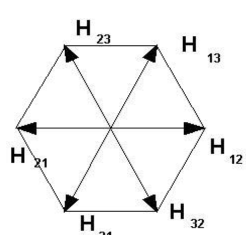
Dla $H \in \mathfrak{h}$ niech $e_i(H)$ oznacza odpowiedni element diagonalny. Mamy

$$[H, E_{ij}] = (e_i(H) - e_j(H))E_{ij},$$

czyli pierwiastek odpowiadający przestrzeni pierwiastkowej $\mathbb{C}E_{ij}$ jest równy $e_i - e_j \in \mathfrak{h}^*, ij \in \{1, \ldots, n+1\}$.

Już obliczyliśmy, że $B_\mathfrak{g}(X,Y) = 2(n+1)\,\mathrm{Tr}(XY), X, Y \in \mathfrak{g}$. Jasne, że ograniczenie takiej formy na $\mathfrak{h}$ jest niezdegenerowane. W szczególności, $B_\mathfrak{g}(H, H_{ij}) = (e_i - e_j)(H)$ dla macierzy $H_{ij} = \frac{1}{2(n+1)}(E_{ii} - E_{jj})$.

Rozważmy przestrzeń $\mathfrak{h}_\mathbb{R} := \sum_{ij} \mathbb{R}H_{ij}$. W przypadku $n = 2$ jest to 2-wymiarowa przestrzeń rzeczywista, a układ pierwiastków wygląda w niej następująco:



Literatura

[Hel00] Sigudur Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, AMS, 2000.