Teoria grup II

Wykład 7

1 Rozwiązalne i nilpotentne algebry Liego. Twierdzenie Leviego.

Literatura dodatkowa: [Woj86, Pos86]

Rozwiązalne i nilpotentne algebry Liego: Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego. Połóżmy $\mathfrak{g}^0 := \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^n := [\mathfrak{g}^{n-1}, \mathfrak{g}^{n-1}]$ oraz $\mathfrak{g}_0 := \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_n = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{n-1}], n = 1, 2, \ldots$ Otrzymujemy ciągi ideałów (*Ćwiczenie:* udowodnij, że $\mathfrak{g}^n, \mathfrak{g}_n$ są ideałami w $\mathfrak{g}$)

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \supset \mathfrak{g}^1 \supset \cdots$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \ldots,$$

o własności $\mathfrak{g}_n \supset \mathfrak{g}^n$. Mówimy, że $\mathfrak{g}$ jest *rozwiązalna* (*nilpotentna*) jeśli istnieje takie $N \in \mathbb{N}$, że $\mathfrak{g}^N = \{0\}$ ($\mathfrak{g}_N = \{0\}$). Powyższa własność pokazuje, że każda algebra nilpotentna jest rozwiązalna.

Przykład: Każda algebra abelowa $\mathfrak{g}$ (np. 1-wymiarowa) jest nilpotentna. Istotnie, $\mathfrak{g}_1 = \{0\}$.

Przykład: Niech $M(k) := \{[X_{ij}] \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \mid X_{ij} = 0\ \forall i \geq j + k\}, k = 0, 1, \ldots$ będzie zbiorem macierzy o wyrazach zerowych poniżej „k-tej górnej diagonali" (0-diagonala to diagonala główna). Wtedy $M(k)M(l) \subset M(k+l)$ (dokładniej $M(k)M(l) = M(k+l)$). Stąd mamy, że algebra Liego macierzy ściśle górnotrójkątnych $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}(n, \mathbb{K}) = M(1)$ jest nilpotentna. Istotnie, $\mathfrak{g}_1 = [M(1), M(1)] \subset M(2), \mathfrak{g}_2 = [M(1), \mathfrak{g}_1] \subset M(3), \ldots, \mathfrak{g}_k = [M(1), \mathfrak{g}_{k-1}] \subset M(k+1)$, skąd $\mathfrak{g}_n = \{0\}$.

Przykład: Algebra Liego $\mathfrak{g} = \mathfrak{b}(n, \mathbb{K}) = M(0)$ macierzy górnotrójkątnych jest rozwiązalna. Istotnie, $\mathfrak{g}^1 = [M(0), M(0)] \subset M(1)$ (tutaj wykorzystujemy fakt, że dla $X, Y \in M(0)$ wyrazy diagonalne w iloczynach XY, YX są takie same). Dalej, $\mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}^1, \mathfrak{g}^1] \subset [M(1), M(1)] \subset M(2), \mathfrak{g}^3 = [\mathfrak{g}^2, \mathfrak{g}^2] \subset [M(2), M(2)] \subset M(4), \mathfrak{g}^4 \subset M(8), \ldots, \mathfrak{g}^k \subset M(2^{k-1})$.

Zauważmy, że $\mathfrak{g}$ nie jest nilpotentna: $\mathfrak{g}_1 = [M(0), M(0)] = M(1), \mathfrak{g}_2 = [M(0), M(1)] = M(1), \ldots, \mathfrak{g}_k = [M(0), M(k-1)] = M(1)$.

Związki z formą Killinga: Jeśli $\mathfrak{g}$ nilpotentna, z definicji wynika, że $\mathrm{ad}_{X_1} \circ \cdots \circ \mathrm{ad}_{X_N} = 0$ dla wystarczająco dużych N i dowolnych $X_1, \ldots, X_N \in \mathfrak{g}$. W szczególności ad_X jest operatorem nilpotentnym dla dowolnego $X \in \mathfrak{g}$ (przypomnijmy, że operator L jest nilpotentny, jeśli $L^N = 0$ dla pewnego $N \in \mathbb{N}$). Stad mamy też, że $B_{\mathfrak{g}} \equiv 0$, ponieważ $B_{\mathfrak{g}}(X, X) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_X^2)$, a ślad operatora nilpotentnego jest równy zero (*dlaczego?*)(wykorzystujemy tu również tożsamość polaryzacyjną $B_{\mathfrak{g}}(X, Y) = (B_{\mathfrak{g}}(X+Y, X+Y) - B_{\mathfrak{g}}(X, X) - B_{\mathfrak{g}}(Y, Y))/2)$.

Przykład: Niech $\mathfrak{g} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{e_1, e_2, e_3\}, [e_1, e_2] = e_2, [e_1, e_3] = ie_3, [e_2, e_3] = 0$. Wtedy $\mathrm{ad}_{e_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}, \mathrm{ad}_{e_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathrm{ad}_{e_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix}$ i $B_{\mathfrak{g}} \equiv 0$. *Ćwiczenie:* Sprawdzić bezpośrednio, że 1) $\mathfrak{g}$ jest algebrą Liego; 2) $\mathfrak{g}$ jest rozwiązalna; 3) $\mathfrak{g}$ nie jest nilpotentna.

Ostatni punkt wynika też z następującego twierdzenia (bo ad_{e_1} nie jest nilpotentny), które przyjmujemy bez dowodu.

Twierdzenie *(Engel) Algebra Liego $\mathfrak{g}$ jest nilpotentna, jeśli ad_X jest operatorem nilpotentnym dla dowolnego $X \in \mathfrak{g}$.*

Punkt 2) powyższego ćwiczenia jest wnioskiem z następnego twierdzenia, które też przyjmujemy bez dowodu.

Twierdzenie *(Kryterium Cartana rozwiązalności) Algebra Liego $\mathfrak{g}$ jest rozwiązalna wtedy i tylko wtedy, gdy $\ker B_{\mathfrak{g}} \supset [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ (inaczej $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]^{\perp} = \mathfrak{g}$).*

Iloczyn półprosty algebr Liego $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$: Niech $f : \mathfrak{g}_2 \to \partial(\mathfrak{g}_1)$ będzie homomorfizmem algebr Liego. Na sumie prostej $\mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_1$ przestrzeni liniowych określamy nawias $[(X_2, X_1), (Y_2, Y_1)] := ([X_2, Y_2]_2, [X_1, Y_1]_1 + f_{X_2} Y_1 - f_{Y_2} X_1)$, gdzie $f_X := f(X), X \in \mathfrak{g}_2$. *Ćwiczenie:* sprawdź, że jest to nawias Liego na $\mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_1$. Oznaczamy $\mathfrak{g}_2 \ltimes \mathfrak{g}_1 := (\mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_1, [,])$.

Rozszerzenia algebr Liego: Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego a $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ jej ideałem. *Ćwiczenie:* 1) udowodnij, że działanie $[X + \mathfrak{a}, Y + \mathfrak{a}] := [X, Y] + \mathfrak{a}$ na przestrzeni ilorazowej $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ jest określone poprawnie i zadaje strukturę algebry Liego; 2) pokaż, że jądro $\ker\phi$ dowolnego homomorfizmu algebr Liego $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ jest ideałem w $\mathfrak{g}$, a jego obraz $\mathrm{im}\,\phi$ podalgebrą w $\mathfrak{h}$; 3) udowodnij, że algebry Liego $\mathrm{im}\,\phi$ i $\mathfrak{g}/\ker\phi$ są izomorficzne.

Ciągiem dokładnym algebr Liego nazywamy ciąg

$$\cdots \to \mathfrak{g}_{k-1} \overset{\phi_{k-1}}{\to} \mathfrak{g}_k \overset{\phi_k}{\to} \mathfrak{g}_{k+1} \to \cdots \tag{1}$$

algebr Liego i homomorfizmów pomiędzy nimi o własności $\ker\phi_k = \mathrm{im}\,\phi_{k-1}$ dla dowolnego k. *Rozszerzeniem* algebry Liego $\mathfrak{g}_2$ za pomocą algebry Liego $\mathfrak{g}_1$ nazywamy *krótki ciąg dokładny*

$$0 \to \mathfrak{g}_1 \overset{\iota}{\to} \mathfrak{g} \overset{\pi}{\to} \mathfrak{g}_2 \to 0.$$

Powyższe ćwiczenie pokazuje, że $\mathfrak{g}_1$ jest ideałem w $\mathfrak{g}$ oraz że $\mathfrak{g}_2 \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1$. Rozszerzenie (1) nazywamy *trywialnym* lub *rozszczepialnym*, jeśli istnieje cięcie $s : \mathfrak{g}_2 \to \mathfrak{g}$ homomorfizmu π (czyli odwzorowanie liniowe o własności $\pi \circ s = \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}_2}$) będące homomorfizmem algebr Liego.

Lemat *Jeśli rozszerzenie (1) jest rozszczepialne, algebra Liego $\mathfrak{g}$ jest izomorficzna z iloczynem półprostym algebr Liego $\mathfrak{g}_2$ i $\mathfrak{g}_1$.*

Dowód: Za pośrednictwem włożenia ι oraz cięcia s utożsamiamy $\mathfrak{g}$ (jako przestrzeń liniową) z $\mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_1$.

Homomorfizm $f : \mathfrak{g}_2 \to \mathrm{End}(\mathfrak{g}_1)$ budujemy w sposób następujący. Dla $X \in \mathfrak{g}_2$ mamy $\mathrm{ad}_X \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_1$ (wskutek tego, że $\mathfrak{g}_1$ jest ideałem). Otrzymaliśmy więc odwzorowanie $f : X \mapsto \mathrm{ad}_X|_{\mathfrak{g}_1} : \mathfrak{g}_2 \to \partial(\mathfrak{g}_1)$ będące homomorfizmem algebr Liego (ponieważ $X \to \mathrm{ad}_X : \mathfrak{g} \to \partial(\mathfrak{g})$ jest homomorfizmem).

Skoro $\iota(\mathfrak{g}_1) = (0, \mathfrak{g}_1)$ oraz $s(\mathfrak{g}_2) = (\mathfrak{g}_2, 0)$ są podalgebrami, mamy $[(0, X_1), (0, Y_1)] = (0, [X_1, Y_1]_1)$, $[(X_2, 0), (Y_2, 0)] = ([X_2, Y_2]_2, 0)$. Stąd $[(X_2, X_1), (Y_2, Y_1)] = [(X_2, 0) + (0, X_1), (Y_2, 0) + (0, Y_1)] = ([X_2, Y_2]_2, 0) + (0, [X_1, Y_1]_1) + [(X_2, 0), (0, Y_1)] + [(0, X_1), (Y_2, 0)] = ([X_2, Y_2]_2, 0) + (0, [X_1, Y_1]_1) + (0, f_{X_2} Y_1) - (0, f_{Y_2} X_1) = ([X_2, Y_2]_2, [X_1, Y_1]_1 + f_{X_2} Y_1 - f_{Y_2} X_1)$. $\square$

PRZYKŁAD: Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Heisenberga, $\mathfrak{g} = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$, $[(x,y,z),(x_1,y_1,z_1)] = (0, xz_1 - zx_1, 0)$. Wtedy $\mathfrak{g}_1 := \{(0,y,0) \mid y \in \mathbb{R}\}$ jest ideałem w $\mathfrak{g}$. *Ćwiczenie:* udowodnij, że $\mathfrak{g}_2 := \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1$ jest 2-wymiarową algebrą abelową i że rozszerzenie $0 \to \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_2 \to 0$ nie jest rozszczepialne.

Radykał algebry Liego $\mathfrak{g}$:

LEMAT *Jeśli $\mathfrak{g}$ jest rozwiązalną algebrą Liego, to dowolna jej podalgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ jest rozwiązalna oraz algebra ilorazowa $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ względem dowolnego ideału $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ jest rozwiązalna. Odwrotnie, jeśli $\mathfrak{g}$ algebra Liego, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ ideał rozwiązalny oraz algebra ilorazowa $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ jest rozwiązalna, to $\mathfrak{g}$ też jest rozwiązalna.*

Dowód: Mamy $\mathfrak{h}^n \subset \mathfrak{g}^n$, stąd pierwsza teza. Niech $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ będzie rzutem naturalnym. Wtedy $(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})^n = \pi(\mathfrak{g}^n)$, stąd druga teza.

Teraz niech $(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})^N = \{0\}$ dla pewnego N. Wtedy $\mathfrak{g}^N = \mathfrak{a}$ i, jeśli $\mathfrak{a}^M = \{0\}$, to $\mathfrak{g}^{N+M} = \mathfrak{a}^M = \{0\}$. $\square$

LEMAT *Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego, a $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \subset \mathfrak{g}$ jej ideałami rozwiązalnymi. Wtedy $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$ też jest ideałem rozwiązalnym.*

Dowód: Suma dwóch ideałów jest ideałem (oczywiste). Mamy izomorfizm algebr Liego $(\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2)/\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_1/\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2$. Ostatnia algebra jest rozwiązalna, a ideał $\mathfrak{a}_2 \subset \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$ też jest rozwiązalny. Stąd $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$ jest algebrą rozwiązalną. $\square$

Sumę wszystkich ideałów rozwiązalnych danej algebry Liego $\mathfrak{g}$ nazywamy *radykałem* tej algebry i oznaczamy $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$. Następujące twierdzenie przyjmiemy bez dowodu.

TWIERDZENIE *Niech $\mathfrak{g}$ będzie dowolną algebrą Liego. Wtedy*

1. $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]^\perp$ *(dopełnienie ortogonalne w sensie formy Killinga $B_\mathfrak{g}$);*
2. *algebra ilorazowa $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ jest półprosta;*
3. *rozszerzenie $0 \to \mathfrak{r}(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) \to 0$ jest rozszczepialne.*

Uwagi: Z pierwszego punktu wynika, że radykał algebry półprostej jest trywialny. Ostatni punkt jest znany jako twierdzenie Leviego. Wynika z niego, że każda algebra Liego $\mathfrak{g}$ jest iloczynem półprostym $\mathfrak{g}_2 \ltimes \mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ swojego radykału oraz pewnej algebry półprostej $\mathfrak{g}_2$. Algebry półproste są sklasyfikowane. Klasyfikacja algebr rozwiązalnych to problem otwarty.

PRZYKŁAD: Niech $\mathfrak{g}_2 := \mathfrak{so}(n,\mathbb{R})$ będzie algebrą Liego grupy obrotów. Wtedy $\mathfrak{g}_2$ działa w sposób naturalny na $\mathbb{R}^n$ za pomocą włożenia $f : \mathfrak{g}_1 \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$. Odpowiedni iloczyn półprosty $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_2 \ltimes \mathbb{R}^n$ nazywamy algebrą *euklidesową* i oznaczamy $\mathfrak{e}(n,\mathbb{R})$. Jest to algebra Liego grupy Liego przekształceń euklidesowych $\mathbb{R}^n$. Tutaj $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = \mathbb{R}^n$ jest ideałem abelowym.

Literatura

[Pos86] Mikhail Postnikov, *Lectures in geometry: Lie groups and Lie algebras. Semester 5.*, Mir, 1986.

[Woj86] Wojciech Wojtyński, *Grupy i algebry Liego*, PWN, 1986.