Teoria grup II

Wykład 6

1 Zwarte i półproste algebry Liego. Cz. II

Literatura dodatkowa: [Hel00, Pos86]

Niezmienniczość formy Killinga ze względu na automorfizmy:

LEMAT *Niech $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ będzie automorfizmem algebry Liego $\mathfrak{g}$. Wtedy $B_\mathfrak{g}(\phi(X), \phi(Y)) = B_\mathfrak{g}(X, Y)$ dla dowolnych $X, Y \in \mathfrak{g}$ (czyli ϕ jest izometrią).*

Dowód: Warunek automorfizmu $\phi[X,Y] = [\phi(X), \phi(Y)]$ można przepisać w postaci $\phi \circ \mathrm{ad}_X Y = (\mathrm{ad}_{\phi(X)} \circ \phi)Y$. Stąd $\mathrm{ad}_{\phi(X)} = \phi \circ \mathrm{ad}_X \circ \phi^{-1}$ oraz $B_\mathfrak{g}(\phi(X), \phi(Y)) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{\phi(X)} \mathrm{ad}_{\phi(Y)}) = \mathrm{Tr}(\phi \circ \mathrm{ad}_X \circ \phi^{-1}\phi \circ \mathrm{ad}_Y X \circ \phi^{-1}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_X \mathrm{ad}_Y) = B_\mathfrak{g}(X, Y)$. $\Box$

Przykłady półprostych algebr Liego: Niech E_{ij} będzie macierzą $n \times n$ o jedynym niezerowym wyrazie równym 1 stojącym w i-tym wierszu i j-tej kolumnie. Wtedy ma miejsce wzór $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$.

Dla macierzy diagonalnej $X = \sum_i x_{ii}E_{ii}$ oznaczmy $\psi_s(X) := x_{ii}$. Wtedy ψ_s jest funkcjonałem liniowym na przestrzeni D macierzy diagonalnych $n \times n$ oraz

$$[E_{ii}, E_{kl}] = (\psi_k(E_{ii}) - \psi_l(E_{ii}))E_{kl}, k \neq l$$

Według liniowości

$$[X, E_{kl}] = (\psi_k(X)) - \psi_l(X)))E_{kl}$$

dla dowolnej $X \in D$. Mamy też $[X, Y] = 0$ dla dowolnych $X, Y \in D$.

Rozważmy algebrę $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$ oraz jej podprzestrzeń $\mathfrak{h} := D \cap \mathfrak{g}$. Niech $e_{ij} := E_{ii} - E_{jj}$. Wtedy operatory $\mathrm{ad}_X, X \in \mathfrak{h}$, są diagonalne w bazie $e_{12}, e_{13}, \ldots, e_{1n}, E_{ij}, i \neq j$. W szczególności, $B_\mathfrak{g}(X, X) = Tr(\mathrm{ad}_X^2) = \sum_{kl}(\psi_k(X) - \psi_l(X))^2 = \sum_{kl}(\psi_k(X)^2 + \psi_l(X)^2 - 2\psi_k(x)\psi_l(X)) = 2n\,\mathrm{Tr}(X^2) - 2(\mathrm{Tr}(X))^2 = 2n\,\mathrm{Tr}(X^2)$.

Teraz niech $X \in \mathfrak{g}$ będzie dowolną macierzą diagonalizowalną, czyli istnieje takie $Y \in GL(n, \mathbb{K})$, że $Z := YXY^{-1} \in D$ (zauważmy, że odwzorowanie $X \mapsto YXY^{-1}$ jest automorfizmem $\mathfrak{g}$ oraz , że $Z \in \mathfrak{h}$). Wtedy $B_\mathfrak{g}(X, X) = B_\mathfrak{g}(Z, Z) = 2n\,\mathrm{Tr}(Z^2) = 2n\,\mathrm{Tr}(X^2)$.

Teraz zauważmy, że każda macierz $S \in \mathfrak{g}$ może być przybliżona macierzami diagonalizowalnymi. Istotnie, dla $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ to wystarczy wykazać dla klatki Jordana

$$J := \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}.$$

Niech $\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)$ będą funkcjami ciągłymi takimi, że $\lambda_i(0) = \lambda, i = 1, \ldots, n$, oraz $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t)$ gdy $i \neq j$ oraz $t \neq 0$. Wtedy macierz

$$J(t) := \begin{bmatrix} \lambda_1(t) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2(t) & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n(t) \end{bmatrix}$$

jest diagonalizowalna (bo ma spektrum proste) oraz ma własność $J(0) = J$. Dla $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ działa podobny argument zastosowany do tzw. uogólnionych klatek Jordana.

Ostatecznie możemy skorzystać z ciągłości $B_\mathfrak{g}$, żeby wywnioskować, że $B_\mathfrak{g}(X, X) = 2n \operatorname{Tr}(X^2)$ dla wszystkich $X \in \mathfrak{g}$ oraz zastosować wzór polaryzacji do udowodnienia wzoru

$$B_\mathfrak{g}(X, Y) = 2n \operatorname{Tr}(XY) \ \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Forma $\operatorname{Tr}(XY)$ jest niezdegenerowana na $\mathfrak{g}$ (*Ćwiczenie*), co pokazuje, że $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$ jest algebrą półprostą.

Można też pokazać, że dla algebry Liego $\mathfrak{g} := \mathfrak{so}(n, \mathbb{K}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \mid X + X^T = 0\}$ macierzy antysymetrycznych spełniony jest wzór

$$B_\mathfrak{g}(X, Y) = (n - 2) \operatorname{Tr}(XY) \ \forall X, Y \in \mathfrak{g},$$

który pokazuje, że $\mathfrak{so}(n, \mathbb{K})$ też jest półprosta. Istotnie, dla $X = \sum_{ij} x_{ij} E_{ij} \in \mathfrak{g}$ mamy $x_{ij} = -x_{ji}$ oraz $\operatorname{Tr}(X^2) = -\sum_{ij} x_{ij}^2 = -2\sum_{i<j} x_{ij}^2$. Jest to forma niezdegenerowana, a dla $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ zauważamy też, że jest < 0.

Różniczkowania algebry półprostej

LEMAT *Jeśli* $\mathfrak{g}$ *jest półprostą, to* $\partial(\mathfrak{g}) = \operatorname{ad}(\mathfrak{g})$*, czyli każde różniczkowanie jest wewnętrzne.*

Dowód: Algebra $\operatorname{ad}(\mathfrak{g})$ jest izomorficzna z $\mathfrak{g}$. Istotnie, jądro homomorfizmu $\operatorname{ad} : \mathfrak{g} \to \operatorname{End}(\mathfrak{g})$ pokrywa się z centrum $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Skoro $\mathfrak{g}$ jest półprosta, ma $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$, stąd $\mathfrak{g}$ jest izomorficzna ze swoim obrazem względem ad.

Algebra izomorficzna z półprostą sama jest półprosta (dowód tego jest bardzo podobny do dowodu Lematu na początku tego wykładu).

Okazuje się, że $\operatorname{ad}(\mathfrak{g})$ jest ideałem w $\partial(\mathfrak{g})$: $[d, \operatorname{ad}_X] = \operatorname{ad}_{dX}, d \in \partial(\mathfrak{g}), X \in \mathfrak{g}$ (*Ćwiczenie*: udowodnij ten wzór). Rozważmy ideał $\mathfrak{a} := (\operatorname{ad}(\mathfrak{g}))^\perp$ (dopełnienie ortogonalne względem $B_{\partial(\mathfrak{g})}$) w $\partial(\mathfrak{g})$. Udowodnimy teraz, że $\mathfrak{a} = \{0\}$.

Niech $d \in \mathfrak{a}$. Wtedy $[d, \operatorname{ad}_X] \in \mathfrak{a} \cap \operatorname{ad}(\mathfrak{g})$. Ostatnia przestrzeń jest zerowa, ponieważ $\mathfrak{a} \cap \operatorname{ad}(\mathfrak{g}) = \ker B_{\partial(\mathfrak{g})}|_{\operatorname{ad}(\mathfrak{g}) \times \operatorname{ad}(\mathfrak{g})} = B_{\operatorname{ad}(\mathfrak{g})} = \{0\}$. Mamy $0 = [d, \operatorname{ad} X] = \operatorname{ad}_{dX}$ dla dowolnego $X \in \mathfrak{g}$. Stąd $dX \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, czyli $dX = 0$ i $d = 0$. $\square$

WNIOSEK *Dla algebry półprostej* $\mathfrak{g}$ *nad* $\mathbb{R}$ *grupa dołączona* $\operatorname{Int}(\mathfrak{g})$ *pokrywa się ze składową jedynki grupy automorfizmów* $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$*. W szczególności* $\operatorname{Int}(\mathfrak{g})$ *jest prawdziwą podgrupą Liego w* $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$*.*

Zwarta algebra Liego: Jest to algebra Liego $\mathfrak{g}$ nad $\mathbb{R}$ taka, że jej grupa dołączona $\operatorname{Int}(\mathfrak{g})$ jest zwarta.

TWIERDZENIE 1. *Niech $\mathfrak{g}$ będzie półprostą algebrą Liego nad $\mathbb{R}$. Wtedy $\mathfrak{g}$ jest zwarta jeśli i tylko jeśli gdy $B_{\mathfrak{g}} < 0$.*

2. *Każda zwarta algebra Liego $\mathfrak{g}$ jest sumą prostą $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, gdzie ideał $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ jest półprosty i zwarty.*

Dowód: Niech $\mathfrak{g}$ będzie półprosta z $B_{\mathfrak{g}} < 0$, a $O(\mathfrak{g}) \subset GL(\mathfrak{g})$ oznacza grupę endomorfizmów zachowujących $B_{\mathfrak{g}}$. Wtedy $O(\mathfrak{g})$ jest zwarta (jest to domknięty podzbiór sfery $\mathrm{Tr}(XX^T) = \mathrm{Tr}(I)$), mamy też zwartość $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \subset O(\mathfrak{g})$ (jako domkniętego podzbioru zbioru zwartego) oraz zwartość $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$.

Odwrotnie, niech $\mathfrak{g}$ będzie zwarta. Wtedy $G := \mathrm{Int}(\mathfrak{g}) \subset GL(\mathfrak{g})$ jest zwartą podgrupą Liego. Istnieje wtedy niezmienniczy względem G dodatnio określony iloczyn skalarny $(|)$ na $\mathfrak{g}$ (dowód istnienia - poprzez uśrednienie, podobnie do przypadku grup skończonych, zob. Wykład 6 z Teorii grup I). W bazie ortonormalnej macierze endomorfizmów z $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ są ortogonalne, a macierze elementów z $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ są antysymetryczne. Mamy

$$B_{\mathfrak{g}}(X, X) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_X \mathrm{ad}_X) = \sum_{ij} x_{ij} x_{ji} = -\sum_{ij} x_{ij}^2 \leq 0,$$

tutaj x_{ij} jest macierzą endomorfizmu ad_X w wybranej bazie ortonormalnej. Równość osiąga się wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{ad}_X = 0$, czyli $X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Rozważmy teraz dopełnienie ortogonalne $\mathfrak{g}'$ do $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ względem $(|)$. Niezmienniczość tego iloczynu ze względu na $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ pokazuje, że $\mathfrak{g}'$ tez jest ideałem, skąd $B_{\mathfrak{g}'} = B_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{g}' \times \mathfrak{g}'}$. Przestrzeń $\mathfrak{g}'$ jest dopełniająca do $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \ker B_{\mathfrak{g}}$, dlatego $B_{\mathfrak{g}'}$ jest niezdegenerowana i < 0. Stąd $\mathfrak{g}'$ jest półprosta i zwarta. Ponadto $[g', g'] = g'$, skąd $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'] = \mathfrak{g}'$. $\square$

WNIOSEK *Algebra Liego $\mathfrak{g}$ jest zwarta wtedy i tylko wtedy gdy jest algebrą Liego pewnej zwartej grupy Liego.*

Dowód: Jeśli $\mathfrak{g}$ jest zwarta, to $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathbb{T} \times \mathrm{Int}(\mathfrak{g}))$, gdzie $\mathbb{T}$ jest torusem wymiaru $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Jeśli $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ dla zwartej G, to $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}) \cong G_0/(Z \cap G_0)$ (tutaj G_0 składowa jedynki grupy G). $\square$

Literatura

[Hel00] Sigudur Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, AMS, 2000.

[Pos86] Mikhail Postnikov, *Lectures in geometry: Lie groups and Lie algebras. Semester 5.*, Mir, 1986.