Teoria grup II

Wykład 5

1 Zwarte i półproste algebry Liego. Cz. I

Literatura dodatkowa: [Hel00]

Suma prosta (zewnętrzna) algebr Liego $(\mathfrak{g}_1, [,]_1)$ **i** $(\mathfrak{g}_2, [,]_2)$**:** Jest to algebra Liego $(\mathfrak{g}, [,])$, gdzie $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2, [(X_1, X_2), (Y_1, Y_2)] := ([X_1, Y_1], [X_2, Y_2])$. *Ćwiczenie:* sprawdź, że to jest algebra Liego.

Ideał $\mathfrak{a}$ w algebrze Liego $\mathfrak{g}$: Jest to podprzestrzeń wektorowa w $\mathfrak{g}$ o własności $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{a}$, gdzie $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] := \{[A, X] \mid A \in \mathfrak{a}, X \in \mathfrak{g}\}$ (zauważmy, że każdy ideał jest podalgebrą). W szczególności, 1) *centrum* $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) := \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0 \ \forall Y \in \mathfrak{g}\}$ algebry Liego $\mathfrak{g}$ jest ideałem w $\mathfrak{g}$; 2) *komutant* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] := \{[X, Y] \mid X, Y \in \mathfrak{g}\}$ algebry Liego $\mathfrak{g}$ jest ideałem w $\mathfrak{g}$; 3) jeśli $(\mathfrak{g}, [,])$ jest sumą prostą, to $(\mathfrak{g}_1, 0), (0, \mathfrak{g}_2)$ są ideałami w $\mathfrak{g}$. *Ćwiczenie:* sprawdź to.

Wewnętrzna suma prosta: Niech $\mathfrak{g}$ ma ideały $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ takie, że $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ (wewnętrzna suma prosta przestrzeni wektorowych, czyli $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_2 = \{0\}$). Wtedy $\mathfrak{g}$ jest izomorficzna jako algebra Liego z zewnętrzną sumą prostą $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$. *Ćwiczenie:* sprawdź to.

Przykład: Niech $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Wtedy $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \mathbb{R}I$, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ oraz $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. *Ćwiczenie:* sprawdź to.

Przykład: Niech $\mathfrak{g} := \{ \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$. Wtedy $\mathfrak{g}$ ze zwykłym komutatorem macierzy jest algebrą Liego (zwaną *algebrą Heisenberga*). Komutator przekłada się na następujące działanie: $[(a, b, c), (a', b', c')] = (0, ac' - a'c, 0)$. W szczególności, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{(0, b, 0) \mid b \in \mathbb{R}\}$, ale nie istnieje takiego ideału (nawet podalgebry) $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$, że $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{a}$ (tutaj rozumiemy ostanie wyrażenie jako sumę prostą algebr Liego). *Ćwiczenie:* sprawdź to.

Przykład: Niech $\mathfrak{g} := \mathfrak{b}(n, \mathbb{R}) := \{[X_{ij}] \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid X_{ij} = 0 \ \forall i > j\}$ (algebra Liego macierzy *górnotrójkątnych*). Wtedy $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{n}(n, \mathbb{R}) := \{[X_{ij}] \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid X_{ij} = 0 \ \forall i \geq j\}$ (algebra Liego macierzy *ściśle górnotrójkątnych*, dla $n = 3$ pokrywa się z algebrą Heisenberga). *Ćwiczenie:* sprawdź to.

Związek pomiedzy ideałami a podgrupami normalnymi:

Lemat *Niech G będzie grupą Liego, $H \subset G$ jej wirtualna podgrupą Liego i niech* $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G), \mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(H)$. *Wtedy H jest podgrupą normalna, jeśli i tylko jeśli $\mathfrak{h}$ jest ideałem w $\mathfrak{g}$.*

Dowód: Niech H normalna, czyli odwzorowanie $A_x : G \to G, A_x y = xyx^{-1}, x \in G$, zachowuje H: $A_x(H) \subset H$. Wtedy jego pochodna $\mathrm{Ad}_x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ zachowuje $T_e H = \mathfrak{h}$, czyli $\mathrm{Ad}_x(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$. Innymi słowy, obraz homomorfizmu grup Liego $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ leży w podgrupie $\mathrm{End}^{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g})$ endomorfizmów $\mathfrak{g}$ zachowujących $\mathfrak{h}$. Wybierzmy bazę $e_1, \dots, e_n$ w $\mathfrak{g}$ taką, że $e_1, \dots, e_k$ jest baza $\mathfrak{h}$. Endomorfizmy z $\mathrm{End}^{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g})$ w tej bazie mają macierze postaci blokowej $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$.

Niech $c(t)$ będzie krzywą gładką w G o warunku $c(0) = e, \dot{c}(0) = X, X \in \mathfrak{g}$. Odwzorowanie Ad przeprowadza tę krzywą na krzywą postaci $\begin{bmatrix} A(t) & B(t) \\ 0 & C(t) \end{bmatrix}$, a jego pochodna ad przeprowadza wektor X na $\begin{bmatrix} \dot{A}(0) & \dot{B}(0) \\ 0 & \dot{C}(0) \end{bmatrix}$. Stąd widzimy, że ad_X też zachowuje $\mathfrak{h}$, a ponieważ $X \in g$ jest dowolne, $\mathfrak{h}$ jest ideałem.

Odwrotnie, niech $\mathfrak{h}$ będzie ideałem. Wtedy $\mathrm{ad}_X Y \in \mathfrak{h}$ dla dowolnego $X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{h}$. Stąd też $\mathrm{Exp}(\mathrm{ad}_X) Y \in \mathfrak{h}$, a wzór $\mathrm{Exp}(\mathrm{ad}_X) = \mathrm{Ad}_{\exp X}$ (zob. Wykład 2) pokazuje, że i $\mathrm{Ad}_{\exp X} Y \in \mathfrak{h}$. Ponieważ $\exp(\mathfrak{g})$ generuje G, mamy $\mathrm{Ad}_x Y \in \mathfrak{h}$ dla dowolnego $x \in G$ (istotnie, jeśli $x = \exp X_1 \cdots \exp X_s$, to $\mathrm{Ad}_x = \mathrm{Ad}_{\exp X_1} \circ \cdots \circ \mathrm{Ad}_{\exp X_s}$ wskutek tego, że Ad jest reprezentacją). Teraz zostaje skorzystać ze wzoru $\exp(\mathrm{Ad}_x Y) = x \exp Y x^{-1}$ (zob. Wykład 2) oraz z faktu, że $\exp(\mathfrak{h})$ generuje H, żeby wywnioskować, że $xHx^{-1} \subset H$. $\square$

Forma Killinga na algebrze Liego $\mathfrak{g}$: Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego nad ciałem $\mathbb{K}(= \mathbb{R}, \mathbb{C})$. Niech $(|)$ będzie dwuliniową forma symetryczna na $\mathfrak{g}$. Nazywamy $(|)$ *niezmienniczą*, jeśli ma własność:

$$([X,Y]|Z) + (Y|[X,Z]) = 0 \ \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$$

(innymi słowy operator ad_X jest w niej skośnie symetryczny dla dowolnego $X \in \mathfrak{g}$).

PRZYKŁAD: Forma $(X|Y) := \mathrm{Tr}(XY)$ na $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}), \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ jest niezmiennicza: $([X,Y]|Z) = \mathrm{Tr}([X,Y]Z) = \mathrm{Tr}((XY - YX)Z) = \mathrm{Tr}(XYZ - YXZ) = \mathrm{Tr}(YZX - YXZ)$ oraz $(Y|[X,Z]) = \mathrm{Tr}(Y[x,Z]) = \mathrm{Tr}(YXZ - YZX) = -([X,Y]|Z)$.

PRZYKŁAD: *Forma Killinga* $B_{\mathfrak{g}}(X,Y) := \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_X \mathrm{ad}_Y)$ jest niezmiennicza dla dowolnej algebry Liego $\mathfrak{g}$: $B_{\mathfrak{h}}([X,Y],Z) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{[X,Y]} \mathrm{ad}_Z) = \mathrm{Tr}([\mathrm{ad}_X, \mathrm{ad}_Y] \mathrm{ad}_Z) = -\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_Y [\mathrm{ad}_X, \mathrm{ad}_Y]) = -\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_Y \mathrm{ad}_{[X,Z]}) = -B_{\mathfrak{g}}(Y, [X,Z])$.

LEMAT *Niech $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ będzie ideałem, a $(|)$ niezmienniczą formą symetryczną na $\mathfrak{g}$. Wtedy dopełnienie ortogonalne $\mathfrak{a}^{\perp} : \{X \in \mathfrak{g} \mid (X|Y) = 0 \ \forall Y \in \mathfrak{a}\}$ też jest ideałem.*

Dowód: Niech $X \in \mathfrak{a}, Y \in \mathfrak{g}, Z \in \mathfrak{a}^{\perp}$. Wtedy $[X,Y] \in \mathfrak{a}$, skąd $0 = ([X,Y]|Z) = -(Y|[X,Z])$, co oznacza, że $[X,Y] \in \mathfrak{a}^{\perp}$. $\square$

Półprosta algebra Liego: Jest to algebra Liego z *niezdegenerowaną* formą Killinga $B_{\mathfrak{g}}$.

Uwaga: Półprosta algebra Liego ma trywialne centrum. Istotnie, centrum $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ jest jądrem odwzorowania $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$. W szczególności, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ leży w jądrze formy Killinga, które jest trywialne.

LEMAT *Niech $\mathfrak{g}$ będzie półprostą algebrą Liego, a $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ jej ideałem. Wtedy*

1. *Ograniczenie $B_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}}$ formy Killinga algebry $\mathfrak{g}$ do $\mathfrak{a}$ pokrywa się z $B_{\mathfrak{a}}$.*

2. *$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^{\perp}$.*

3. *$\mathfrak{a}$ (i $\mathfrak{a}^{\perp}$) jest algebrą półprostą.*

Dowód: Ad. 1. Znowu wybierzmy bazę $e_1, \dots, e_n$ w $\mathfrak{g}$ taką, że $e_1, \dots, e_k$ jest baza $\mathfrak{a}$. Endomorfizmy $\mathrm{ad}^{\mathfrak{g}}_X, X \in \mathfrak{a}$, w tej bazie mają macierze postaci blokowej $\begin{bmatrix} A(X) & B(X) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, natomiast macierze $\mathrm{ad}^{\mathfrak{a}}_X$ w bazie $e_1, \dots, e_k$ pokrywają się z $A(X)$. Widać, że $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}^{\mathfrak{g}}_X \mathrm{ad}^{\mathfrak{g}}_Y) = \mathrm{Tr}(A(X)A(Y)) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}^{\mathfrak{a}}_X \mathrm{ad}^{\mathfrak{a}}_Y)$.

Ad. 2. Niech $Z \in \mathfrak{g}, X, Y \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp}$. Wtedy $B_{\mathfrak{g}}(Z, [X,Y]) = -B_{\mathfrak{g}}([X,Z], Y) = 0$ (bo $[X,Z] \in \alpha, Y \in \alpha^{\perp}$), skąd $[X,Y]$ jest ortogonalne do całej $\mathfrak{g}$, czyli musi być zero wskutek tego, że $B_{\mathfrak{g}}$ jest niezdegenerowana. Innymi słowy, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp}$ jest *abelową* algebrą Liego (czyli z zerowym nawiasem $[,]$).

Wybierzmy teraz bazę $e_1, \dots, e_n$ w $\mathfrak{g}$ inaczej, tak, żeby $e_1, \dots, e_m$ było bazą w $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp}$. Niech $Z \in \mathfrak{g}, T \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp}$. Wtedy $\mathrm{ad}_T \mathrm{ad}_Z$ odwzorowuje $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp}$ w zero (bo $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp}$ jest ideałem jak i każde przecięcie dwóch ideałów, czyli $[Z, \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp}] \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp}$, a ponadto jest abelowy, czyli $[T, [Z, \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp}]] = 0$). Natomiast przestrzeń naciągnięta na wektory $e_{m+1}, \dots, e_n$ jest odwzorowywana przez endomorfizm $\mathrm{ad}_T \mathrm{ad}_Z$ w $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp}$ (bo ad_T wszystko odwzorowuje w $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp}$).

W wybranej bazie macierz endomorfizmu $\mathrm{ad}_T \mathrm{ad}_Z$ ma postać $\begin{bmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, skąd $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_T \mathrm{ad}_Z) = 0$. wnioskujemy, że $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp}$ jest ortogonalne do całej przestrzeni, czyli $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp} = \{0\}$. Niezdegenerowaność $B_{\mathfrak{g}}$ implikuje równość $\dim \mathfrak{a}^{\perp} = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{a}$, która daje $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} + \mathfrak{a}^{\perp}$.

Ad. 3. Gdyby $B_{\mathfrak{a}}$ było zdegenerowane, istniałby nietrywialny wektor $v \in \ker B_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp}$. $\square$

Prosta algebra Liego: Jest to półprosta algebra Liego nie zawierająca nietrywialnych ideałów (ideały trywialne to $\{0\}$ i cała algebra).

PRZYKŁAD: Wszystkie algebry z przykładów powyżej nie są proste.

TWIERDZENIE *Półprosta algebra Liego $\mathfrak{g}$ jest sumą prostą $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$, gdzie każde $\mathfrak{g}_i$ jest ideałem bedącym algebrą prostą. Ponadto każdy ideał algebry $\mathfrak{g}$ jest sumą prostą pewnych $\mathfrak{g}_i$.*

Dowód: Jeśli $\mathfrak{g}$ ma nietrywialny ideał $\mathfrak{a}$, rozszczepimy $\mathfrak{g}$ na $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^{\perp}$. Oba ideały są półproste. Stosując powyższą procedurę do $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{a}^{\perp}$ indukcyjnie dojdziemy do ideałów prostych i otrzymamy rozkład $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$. $\square$

Półproste i proste grupy Liego: Są to grupy Liego, których algebry Liego są odpowiednio półproste i proste.

Literatura

[Hel00] Sigudur Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, AMS, 2000.