Teoria grup II

Wykład 4

1 Grupa automorfizmów algebry Liego

Literatura dodatkowa: [Hel00]

Kilka uwag wstępnych:

Uwaga 1: W pytaniu o jednoznaczności wirtualnej podgrupy Liego H odpowiadającej podalgebrze Liego $\mathfrak{h}$ istotny jest wymóg spójnosci H. Na przykład, grupa Liego $GL(n,\mathbb{R})$ ma dwie składowe spójne $GL_{\pm}(n,\mathbb{R}) := \{X \in GL(n,R) \mid \pm \det X > 0\}$. Składowa spójna jedynki, $GL_{+}(n,\mathbb{R})$ ma tę samą algebrę Liego $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) = \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$, co i $GL(n,\mathbb{R})$.

Uwaga 2: Spójna wirtualna podgrupa Liego $H \subset G$ odpowiadająca podalgebrze Liego $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ może nie pokrywać się z $\exp(\mathfrak{h})$ (zob. przykład poniżej) ale jest generowana przez $\exp(\mathfrak{h})$. Ostatnie oznacza, że elementy z H sa postaci $\exp Y_1 \cdots \exp Y_n$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ i pewnych $Y_1, \ldots, Y_n \in \mathfrak{h}$. Wynika to z faktu, że każdy punkt y z podrozmaitości całkowej N_x dystrybucji $D = \langle X_1^l, \ldots, X_r^l \rangle$ jest postaci $\Phi^{t_1}_{X^l_{i_1}} \circ \cdots \circ \Phi^{t_n}_{X^l_{i_n}} x$, gdzie $\Phi^{t_j}_{X^l_{i_j}}$ jest potokiem pola $X^l_{i_j}$.

Uwaga 3: Jeśli $H \subset G$ jest wirtualną podgrupą Liego w grupie Liego G to odpowiednią podalgebrę Liego $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ można szukać używając wzoru $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \exp_{\mathfrak{g}}(X) \in H\}$, gdzie $\exp_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \to G$ odwzorowanie wykładnicze odpowiadające większej grupie. *Ćwiczenie:* Udowodnij to.

PRZYKŁAD: Niech $G := GL(n,\mathbb{R}), H := SL(n,\mathbb{R}) = \{x \in G \mid \det x = 1\}$. Wtedy $\mathfrak{h} = \{X \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R}) \mid \det \mathrm{Exp}(X) = 1\}$. Znana jest tożsamość $\det \mathrm{Exp}(X) = e^{\mathrm{Tr}(X)}$ (zob. [Tra, I.7.1]), która implikuje $\mathfrak{h} = \{X \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}(X) = 0\} =: \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$.

PRZYKŁAD: Niech $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. Wtedy $\det(X - \lambda I) = -(a^2 - \lambda^2) - bc$ i λ jest wartością własna wtedy i tylko wtedy gdy $\lambda^2 = a^2 + bc = -\det(X) =: D$. Postać Jordana macierzy X i $\mathrm{Exp}(X)$ jest równa odpowiednio

1. $\begin{bmatrix} \sqrt{D} & 0 \\ 0 & -\sqrt{D} \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} e^{\sqrt{D}} & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{D}} \end{bmatrix}$, jeśli $D > 0$;
2. $\begin{bmatrix} i\sqrt{-D} & 0 \\ 0 & -i\sqrt{-D} \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} e^{i\sqrt{-D}} & 0 \\ 0 & e^{-i\sqrt{-D}} \end{bmatrix}$, jeśli $D < 0$;
3. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, jeśli $D = 0$.

(*Ćwiczenie:* Znajdź jawną postać $\mathrm{Exp}(X)$ w każdym przypadku.) Wynika z tego, że macierz $x = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$ nie leży w $\mathrm{Exp}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}))$ dla $\alpha < 0, \alpha \neq -1$ (x pokrywa się ze swoją postacią Jordana).

Uwaga 4: (zob. [Hel00, II,§5]) Jeśli G jest grupą Liego, a $H \subset G$ jej *normalną* podgrupą Liego (prawdziwą), to grupa ilorazowa G/H posiada naturalną strukturę grupy Liego, względem której rzut kanoniczny $\pi : G \to G/H$ jest gładkim homomorfizmem grup.

Uwaga 5: (zob. [Hel00, II,§5]) Jeśli $\Phi : G \to F$ jest homomorfizmem gładkim grup Liego, to

1. jądro $H := \ker \Phi = \Phi^{-1}(e)$ jest normalną (prawdziwą) podgrupą Liego w G;

2. istnieje jedyny gładki homomorfizm grup Liego $\Phi' : G/H \to F$ zamykający diagram

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, "\Phi"] & \\ G/H \arrow[r, "\Phi'"] & F \end{tikzcd} .$$

3. obraz $\Phi(G)$ jest wirtualną podgrupą Liego w F, przy czym odwzorowanie Φ' zadaje izomorfizm struktur grup Liego na G/H i $\Phi(G)$.

Automorfizmy algebry Liego $\mathfrak{g}$: Są to endomorfizmy odwracalne $N \in GL(\mathfrak{g})$ przestrzeni liniowej $\mathfrak{g}$ będące jednocześnie homomorfizmami algebry Liego $(\mathfrak{g}, [,])$. (*Ćwiczenie:* Sprawdź, że odwrotność takiego homomorfizmu automatycznie jest homomorfizmem.) Automorfizmy algebry Liego tworzą podgrupę $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ w grupie Liego $GL(\mathfrak{g})$.

Ćwiczenie: Udowodnij, że $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ jest podgrupą Liego w $GL(\mathfrak{g})$. *Wskazówka:* Wykaż, że $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ jest liniową grupą algebraiczną (zob. Wykład 12 z Teorii grup I).

Algebra Liego $\partial(\mathfrak{g})$ grupy $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$: Wiemy (zob. Uwagę 3), że $\partial(\mathfrak{g})$ składa się z takich $D \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) := \mathrm{End}(\mathfrak{g})$, że $\mathrm{Exp}(tD) \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$, czyli

$$\mathrm{Exp}(tD)[X,Y] = [\mathrm{Exp}(tD)X, \mathrm{Exp}(tD)Y], X, Y \in \mathfrak{g}. \tag{1}$$

Różniczkując tę równość po t w zerze otrzymujemy

$$D[X,Y] = [DX,Y] + [X,DY], X, Y \in \mathfrak{g} \tag{2}$$

(istotnie, $\mathrm{Exp}(tD)[X,Y] = (I + tD + \cdots)[X,Y] = [X,Y] + tD[X,Y] + \cdots$, $[\mathrm{Exp}(tD)X, \mathrm{Exp}(tD)Y] = [(I + tD + \cdots)X, (I + tD + \cdots)Y] = [X,Y] + t([DX,Y] + [X,DY]) + \cdots$, tutaj $\cdots$ oznacza człony rzędu wyższego niż 1 po t). Powyższy wzór oznacza, że D jest *różniczkowaniem* algebry Liego $(\mathfrak{g}, [,])$ (zob. ostatni wykład z Teorii grup I).

LEMAT *Algebra Liego* $\partial(\mathfrak{g})$ *grupy Liego* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ *składa się ze wszystkich różniczkowań algebry Liego* $(\mathfrak{g}, [,])$.

Dowód: Niech D będzie różniczkowaniem. Stosując indukcję otrzymujemy ze wzoru (2) wzór na „wyższe różniczkowania": $D^k[X,Y] = \sum_{i+j=k} \frac{k!}{i!j!}[D^iX, D^jY]$, gdzie $D^0 := \mathrm{Id}$. Stąd dla D otrzymujemy wzór (1), czyli $\mathrm{Exp}(tD) \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. $\square$

Grupa dołączona i różniczkowania wewnętrzne: Tożsamość Jakobiego implikuje dwa ważne fakty: 1) dla dowolnego $X \in \mathfrak{g}$ operator $\mathrm{ad}_X \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ jest różniczkowaniem (zwanym *wewnętrznym*); 2) odwzorowanie $X \mapsto \mathrm{ad}_X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ jest homomorfizmem algebr Liego. (*Ćwiczenie:* Udowodnij to po raz kolejny). Obraz tego homomorfizmu oznaczamy $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$. Jest on podalgebrą w $\partial(\mathfrak{g})$ (jako obraz homomorfizmu).

Teraz opiszemy grupę Liego odpowiadającą tej algebrze Liego.

LEMAT *Niech G będzie grupą Liego. Wtedy dla każdego $x \in G$ endomorfizm odwracalny* $\mathrm{Ad}_x \in GL(\mathfrak{g})$ *jest automorfizmem algebry Liego* $\mathfrak{g}$

Dowód: Przypomnijmy, że odwzorowanie $\mathrm{Ad}_x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ było zdefiniowane jako pochodna w jedynce $(A_x)_*|_e$ automorfizmu wewnętrznego $A_x, A_x y := xyx^{-1}$, grupy G. Pochodna w jedynce homomorfizmu grup Liego jest homomorfizmem odpowiednich algebr Liego (zob. Wykład 1), stąd Ad_x jest homomorfizmem algebry Liego $\mathfrak{g}$. Jest to homomorfizm odwracalny ($(\mathrm{Ad}_x)^{-1} = A_{x^{-1}}$), czyli jest automorfizmem $\mathfrak{g}$. $\square$

Z lematu tego wynika, że obraz gładkiego homomorfizmu grup Liego $\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g}), x \mapsto \mathrm{Ad}_x$, leży w podgrupie Liego $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Wirtualną podgrupę Liego $\mathrm{Ad}(G) \subset \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ oznaczamy przez $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ i nazywamy grupą *dołączoną* lub grupą *automorfizmów wewnętrznych.* Ponieważ odwzorowanie $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ było definiowane jako pochodna Ad w jedynce, $\mathrm{Lie}(\mathrm{Int}(\mathfrak{g})) = \mathrm{im}\,\mathrm{ad} = \mathrm{ad}(\mathfrak{g})$.

LEMAT *Niech G będzie spójną grupa Liego, a $Z = \{x \in G \mid x \cdot y = y \cdot x \ \forall y \in G\} \subset G$ będzie jej* centrum. *Wtedy jądro homomorfizmu grup* $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ *pokrywa się z Z. W szczególności,* $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ *jest izomorficzna jako grupa Liego z G/Z.*

Dowód. Jeśli $x \in Z$, to $A_x = \mathrm{Id}_G$ i jego pochodna Ad_x też jest identycznością, czyli $x \in \ker \mathrm{Ad}$.

Odwrotnie, niech $x \in \ker \mathrm{Ad}$. Wzór $x \exp X x^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}_x X)$ (zob. Wykład II) implikuje, że jeśli $x \in Z$, to x komutuje ze wszystkimi elementami postaci $\exp X, X \in \mathfrak{g}$. Ponieważ takie elementy generują G (zob. Uwagę 2), $x \in Z$. $\square$

Literatura

[Hel00] Sigudur Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, AMS, 2000.

[Tra] Andrzej Trautman, *Grupy oraz ich reprezentacje*, Skrypt do wykładu, dostępne na http://www.fuw.edu.pl/ amt.