Teoria grup II

Wykład 3

1 Związek pomiędzy podgrupami i podalgebrami Liego

Literatura dodatkowa: [Ada69, DK00, Hel00, Pos86]

Podrozmaitości włożone i zanurzone: Niech M będzie gładką rozmaitością. Podrozmaitością (*włożoną*) kowymiaru k w M nazywamy podzbiór $N \subset M$ taki, że dla każdego $x \in N$ istnieje otoczenie otwarte $U \ni x$ w M oraz odwzorowanie gładkie $f : U \to \mathbb{R}^k$ o własnościach:

1. rząd odwzorowania f jest równy k w dowolnym punkcie $y \in U \cap N$;
2. $z \in U \cap N \iff \exists! c \in \mathbb{R}^k : f(z) = c$.

Podrozmaitością *zanurzoną* kowymiaru k, z kolei, nazywamy podzbiór $N \subset M$ taki, że istnieje rozmaitość gładka N' wymiaru $\dim M - k$ oraz odwzorowanie gładkie $\Phi : N' \to M$ o własnościach:

1. Φ jest injektywne;
2. Φ jest immersja, czyli $(\Phi_*)|_x : T_x N' \to T_{\Phi(x)} M$ jest injektywne dla dowolnego $x \in N'$;
3. $\Phi(N') = N$.

Ćwiczenie: Udowodnić, że każda podrozmaitość jest podrozmaitością zanurzoną.

Przykład („owinięcie torusa"): $M := \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, pole wektorowe $v_{a,b} := a\frac{\partial}{\partial x^1} + b\frac{\partial}{\partial x^2}$, gdzie $a, b \in]0, \infty[$ są ustalone, może być zrzutowane na pole wektorowe $\tilde{v}_{a,b}$ na $\mathbb{T}^2$. Trajektorie ostatniego $t \to P(x^1 + at, x^2 + bt)$ są rzutami prostych $t \to (x^1 + at, x^2 + bt)$.

Przypadek wymierny: b/a wymierne, $b = m\lambda, a = n\lambda$ dla pewnego $\lambda \in \mathbb{R}$. Wtedy dla $t := 1/\lambda$ mamy $(x^1 + at, x^2 + bt) = (x^1 + m, x^2 + n)$ i $P(x^1 + at, x^2 + bt) = P(x^1, x^2)$ (trajektorie są domknięte, czyli okresowe, i są podrozmaitościami).

Przypadek niewymierny: b/a niewymierne (każda trajektoria jest podrozmaitością zanurzoną gęstą w M, w szczególności nie jest podrozmaitością).

Podgrupa Liego H w grupie Liego G: Jest to podgrupa $H \subset M$ będąca podrozmaitością. *Ćwiczenie:* udowodnić, że podgrupa Liego ma naturalną strukturę grupy Liego oraz, ze naturalne włożenie $\iota : H \to G$ jest gładkim homomorfizmem.

Wirtualna podgrupa Liego H w grupie Liego G: Jest to podgrupa $H \subset M$ będąca obrazem gładkiego monomorfizmu grup $H' \to G$ dla pewnej grupy Liego H'. W szczególności: 1) H jest podrozmaitością zanurzona (*Ćwiczenie:* udowodnij); 2) oraz każda podgrupa Liego jest wirtualną podgrupą Liego; 3) H ma strukturę grupy Liego „przychodzącą" z H'.

PRZYKŁAD: Trajektoria pola $\tilde{v}_{a,b}$ przechodząca przez 0 jest wirtualną podgrupą Liego i jest (prawdziwą) podgrupą Liego tylko w przypadku wymiernym.

Uwaga: Można pokazać, że wirtualna podgrupa Liego jest podgrupą Liego wtedy i tylko wtedy, gdy H jest domknięta w G (jako podprzestrzeń topologiczna), zob. [Ada69].

Związek pomiędzy podgrupami i podalgebrami Liego:

TWIERDZENIE 1. *Niech H będzie wirtualną podgrupą Liego w G. Wtedy podprzestrzeń $\mathfrak{h} := T_eH \subset T_eG = \mathfrak{g}$ jest podalgebrą Liego w algebrze Liego $(\mathfrak{g}, [,])$ (innymi słowy $[x, y] \in \mathfrak{h}$ dla wszystkich $x, y \in \mathfrak{h}$). Ponadto $(\mathfrak{h}, [,]|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}) = \mathrm{Lie}(H)$ ($\mathrm{Lie}(F)$ oznacza algebrę Liego grupy Liego F).*

2. *Odwrotnie, niech $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ będzie podalgebrą Liego w algebrze Liego $(\mathfrak{g}, [,])$ grupy Liego G. Wtedy istnieje jedyna wirtualna podgrupa Liego $H \subset G$ o własności $\mathfrak{h} = T_eH$. Ponadto $(\mathfrak{h}, [,]|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}) = \mathrm{Lie}(H)$.*

Dowód: Ad. 1. Rozważmy monomorfizm $\Phi : H' \to G, \Phi(H') = H$. Mamy odwzorowanie styczne $\phi := (\Phi_*)|_e : \mathfrak{h}' \to \mathfrak{g}$ (tutaj $\mathfrak{h}' := \mathrm{Lie}(H'), \mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G)$) będący homomorfizmem algebr Liego, zob. Wykład 1 (dokładniej, ϕ jest monomorfizmem, czyli homomorfizmem z trywialnym jądrem). *Ćwiczenie:* pokaż, że obraz homomorfizmu $\mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ algebr Liego jest podalgebrą Liego w $\mathfrak{g}_2$. Oczywistym jest, że $\operatorname{im}\phi = \mathfrak{h}$. To, że $(\mathfrak{h}, [,]|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}) = \mathrm{Lie}(H)$ wynika z definicji struktury grupy Liego na H: ona „przychodzi" z H', skąd struktura algebry Liego na $\mathfrak{h}$ „przychodzi" z $\mathfrak{h}'$.

DYGRESJA O TWIERDZENIU FROBENIUSA: *Dystrybucją* wymiaru r na rozmaitości gładkiej M nazywamy gładką podwiązkę $D \subset TM$ wiązki stycznej TM z włóknem wymiaru r. Innymi słowy jest to rodzina podprzestrzeni $D_x \subset T_xM$ gładko zależąca od punktu $x \in M$. Lokalnie taka dystrybucja jest generowana przez r liniowo niezależnych (w każdym punkcie) pól wektorowych.

Mówimy, że D jest *całkowalna*, jeśli przez każdy punkt $x \in M$ przechodzi podrozmaitość zanurzona N_x o własności $T_xN_x = D_x$ (takie N_x nazywamy *podrozmaitościami całkowymi* dla D). Gładkość D gwarantuje jednoznaczność takiej podrozmaitości.

Mówimy, że $\mathcal{D}$ jest *inwolutywna*, jeśli jeśli dla dowolnych dwóch pól wektorowych $X, Y \in \mathrm{Vect}(M)$ stycznych do D $\mathcal{D}$ (czyli takich, że $X(x), Y(x) \in D_x$ dla wszystkich $x \in M$) ich komutator $[X, Y]$ też jest styczny do $\mathcal{D}$ (równoważnie, lokalnie istnieją $v_1, \ldots, v_r, v_i \in \mathrm{Vect}(M)$, i funkcje f_{ij}^k takie, że $\mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_r\} = \mathcal{D}$ and $[v_i, v_j] = f_{ij}^k v_k$; *Ćwiczenie:* udowodnij równoważność).

PRZYKŁAD: Dystrybusja D generowana przez pole wektorowe $\tilde{v}_{a,b}$ na $\mathbb{T}^2$ (jak i każda dystrybucja 1-wymiarowa na dowolnej rozmaitości) jest inwolutywna i całkowalna. Podrozmaitości całkowe są trajektoriami pola $\tilde{v}_{a,b}$.

TWIERDZENIE *(Frobeniusa) Dystrybucja D jest całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest inwolutywna.*

PRZYKŁAD: Dystrybucja 2-wymiarowa generowana przez pola wektorowe $X = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}, Y = \frac{\partial}{\partial y}$ na $\mathbb{R}^3$ nie jest inwolutywna, więc nie jest całkowalna.

Ad. 2. (szkic dowodu) Niech $X_1, \ldots, X_r \in \mathfrak{h} = T_eH$ będzie bazą przestrzeni liniowej $\mathfrak{h}$. Rozważmy pola lewoniezmiennicze $X_1^l, \ldots, X_r^l$ oraz dystrybucję gładką $D \subset TG$ rozpiętą przez nie. Ponieważ $[X_i^l, X_j^l] = [X_i, X_j]^l$ (zob. ostatni wykład z Teorii grup I), dystrybucja D jest inwolutywna, więc i całkowalna. Niech H będzie podrozmaitością całkową dla D przechodzącą przez e.

Udowodnimy, że H jest podgrupą. Istotnie, D jest generowane przez lewoniezmiennicze pola wektorowe, jest więc lewoniezmiennicze: $(L_g)_* D = D, g \in G$. Stąd wnioskujemy, że i zbiór jego podrozmaitości całkowych jest lewoniezmienniczy. Dokładniej mówiąc, jeśli H_x jest podrozmaitością całkową przechodzącą przez $x \in G$, to $L_g H_x = H_{gx}$. W szczególności dla $g \in H = H_e$ mamy $L_g H = L_g H_e = H_{ge} = H_g = H$. Innymi słowy $gh \in H$ dla dowolnych $g, h \in H$. Jeśli $h \in H$, to $L_{h^{-1}} H = L_{h^{-1}} H_h = H_{h^{-1}h} = H_e = H$. W szczególności, $h^{-1}e \in H$. Wraz z oczywistym warunkiem $e \in H$ to daje żądaną własność H.

Do zakończenia dowodu należy wprowadzić na H strukturę gładką taką, że działania grupowe oraz włożenie $\iota : H \hookrightarrow G$ są gładkie w niej (wtedy H' pokrywa się z H z tą strukturą, a monomorfizm $H' \to G$ pokrywa się z ι). Ta część dowodu okazuje się nietrywialna z powodu subtelności topologicznych (zob. [Pos86]) i ją opuścimy. □

Literatura

[Ada69] J. Frank Adams, *Lectures on Lie groups*, Benjamin, 1969.

[DK00] J. Duistermaat and J. Kolk, *Lie groups, Universitext*, Springer, 2000.

[Hel00] Sigudur Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, AMS, 2000.

[Pos86] Mikhail Postnikov, *Lectures in geometry: Lie groups and Lie algebras. Semester 5.*, Mir, 1986.