Teoria grup II

Wykład II

1 O algebrach Liego grup Liego raz jeszcze. Cz. II

Literatura dodatkowa: [Ada69, Tra, DK00]

Przypomnienie o polach lewoniezmienniczych: Dla $g \in G$ określmy odwzorowanie lewej translacji $L_g : G \to G$ wzorem $L_g x := gx$ (i, przy okazji, prawej translacji $R_g : G \to G$ wzorem $R_g x := xg$). Mając element $V \in T_e G = \mathfrak{g}$ możemy zbudować pole wektorowe $V^l \in \mathrm{Vect}(G)$ kładząc $V^l = (L_g)_*|_e V$. Tak okreslone pole wektorowe jest *lewoniezmiennicze*, czyli $(L_g)_* V^l = V^l$. I odwrotnie, każde pole lewoniezmiennicze $v \in \mathrm{Vect}(G)$ jest postaci $v = V^l$, gdzie $V := w(e)$.

Potok pola lewoniezmienniczego

LEMAT *Niech $\Phi^t := \Phi^t_w : G \to G$ będzie lokalnym potokiem pola lewoniezmienniczego w na G. (Inaczej mówiąc $\frac{d}{dt}\Phi^t(x_0) = w(x_0)$ dla dowolnego $x_0 \in G$, czyli krzywa $t \mapsto \Phi^t(x_0)$ zadaje lokalne rozwiązanie równania różniczkowego $\dot{x} = w(x)$ z warunkiem początkowym $x_0 \in G$.) Wtedy ma miejsce wzór*

$$\Phi^t = R_{\Phi^t(e)}.$$

Dowód: Niech $x(t) := R_{\Phi^t(e)} x_0$. Wtedy $x(t) = x_0 \Phi^t(e) = L_{x_0}\Phi^t(e)$ oraz $x(0) = x_0$. Ponadto

$$\frac{d}{dt}x(t) = (L_{x_0})_*|_{\Phi^t(e)} w(\Phi^t(e)) = w(x_0\Phi(e)) = w(x(t)).$$

Stąd $x(t) = \Phi^t(x_0)$. $\square$

Jednoparametrowe podgrupy w G: Są to homomorfizmy grup $(\mathbb{R}, +) \to G$.

TWIERDZENIE *Dla każdego $X \in \mathfrak{g}$ istnieje jedyna jednoparametrowa podgrupa $h_X : (\mathbb{R}, +) \to G$ gładka oraz spełniająca warunek $\frac{d}{dt}|_{t=0} h_X(t) = X$. Jest ona równa $t \mapsto \Phi^t_{X^l}(e)$ (w szczególności krzywa całkowa pola X^l przechodząca przez e jest globalna w czasie).*

Dowód: Niech $\Phi^t := \Phi^t_{X^l}$. Znana z teorii równań różniczkowych jest własność $\Phi^{t+s} = \Phi^t \circ \Phi^s$ (o ile prawa i lewa części są określone). Z lematu mamy $\Phi^t \circ \Phi^s = R_{\Phi^t(e)} \circ R_{\Phi^s(e)} = R_{\Phi^s(e)\cdot\Phi^t(e)}$, ale mamy też $\Phi^{t+s} = R_{\Phi^{t+s}(e)}$. Stąd $\Phi^s(e) \cdot \Phi^t(e) = \Phi^{t+s}(e)$.

Równość ta pokazuje, że, jeśli krzywa $t \mapsto \Phi^t(e)$ jest określona dla $t \in]-\epsilon, \epsilon[$, to jest ona określona również dla $t \in]-2\epsilon, 2\epsilon[$. Iterując, dostajemy globalność po t.
Jednoznaczność: Niech $h : (\mathbb{R}, +) \to G$ będzie podgrupą jednoparametrową o warunku $\frac{d}{dt}|_{t=0} h(t) = X$. Różniczkując równość

$$h(t+s) = h(t)h(s) = L_{h(t)}h(s)$$

po s w zerze mamy $\dot{h}(t) = (L_{h(t)})_*|_e X = X^l(h(t))$. Stąd $h(t)$ jest krzywą całkową pola X^l przechodzącą przez e, czyli jest określona jednoznacznie. $\square$

Odwzorowanie wykładnicze $\exp : \mathfrak{g} \to G$**:** Dla $X \in \mathfrak{g}$ definiujemy $\exp(X)$ jako $h_X(1)$, gdzie $h_X(t)$ jest (jedyną) grupą jednoparametrową o warunku $\dot{h}_X(0) = X$.

TWIERDZENIE *exp jest dyfeomorfizmem pewnego otoczenia $U \ni 0$ w $\mathfrak{g}$ na pewne otoczenie $V \ni e$ w G.*

Dowód: Gładkość *exp* wynika z teorii równań różniczkowych. Rozważmy $h : s \mapsto h_X(st)$. Wtedy $h(s+s') = h_X((s+s')t) = h_X(st+s't) = h_X(st)\cdot h_X(s't) = h(s)\cdot h(s')$, czyli h jest podgrupą jendoparametrową. Ponadto $\dot{h}(0) = tX$, skąd $h(s) = h_{tX}(s)$. Dla $s=1$ to daje

$$h_X(t) = \exp(tX).$$

Różniczkując tę równość w zerze, otrzymujemy $X = \exp_*|_0 X$, czyli $\exp_*|_0 = \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}$. Stosując twierdzenie o odwzorowaniu odwrotnym, dostajemy wynik. $\square$

PZYKŁAD: Niech $G = U(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} = 1\}$. Wtedy jedynym (z dokładnością do proporcjonalności lewoniezmienniczym polem na G jest $v = w|_G$, gdzie w jest polem wektorowym na płaszczyźnie zadanym przez $w := -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$. Istotnie, obrót o kat ϕ jest zadany macierzą $L_\phi := \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$. Pochodna z tego odwzorowania liniowego z nim się pokrywa i mamy

$$L_\phi w((\cos\phi_0, \sin\phi_0)) = L_\phi \begin{bmatrix} -\sin\phi_0 \\ \cos\phi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\phi+\phi_0) \\ \cos(\phi+\phi_0) \end{bmatrix} = w((\cos(\phi+\phi_0), \sin(\phi+\phi_0)).$$

Odwzorowanie $t \mapsto L_t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (innymi słowy $t \mapsto e^{it}$) jest jednoparametrową grupą h_X, odpowiadającą wektorowi $X = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = w((1,0)) \in \mathfrak{g} = T_eG$. Odwzorowanie wykładnicze jest więc równe $tX \mapsto h_{tX}(1) = h_X(t) = e^{it}$.

PRZYKŁAD: Niech $G = GL(n, \mathbb{R})$. Pola lewoniezmiennicze $V^l, V \in \mathfrak{g} = \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$, mają postać $(XV, X), X \in G$ (zob. ostatni wykład z Teorii grup I). Równanie różniczkowe $\dot{X} = XV$ ma rozwiązanie $t \mapsto X\mathrm{Exp}(tV)$, gdzie Exp jest funkcją wykładniczą od operatorów liniowych na $\mathbb{R}^n$. Rozwiązanie to zadaje jednoparametrową podgrupę odpowiadającą elementowi $V \in \mathfrak{g}$. Odwzorowanie wykładnicze $\mathfrak{g} \to G$ ma postać $V \mapsto \mathrm{Exp}(V)$.

Inne własności odwzorowania exp

TWIERDZENIE
1. *Jeśli G, H są grupami Liego o algebrach Liego $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$, a $\Phi : G \to H$ jest gładkim homomorfizmem, to*
$$\Phi(\exp X) = \exp((\Phi_*)|_e X) \ \forall X \in \mathfrak{g}.$$
2. $\mathrm{Ad}_{\exp X} = \mathrm{Exp}(\mathrm{ad}_X) \ \forall X \in \mathfrak{g}$.
3. $x \exp X x^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}_x X) \ \forall X \in \mathfrak{g}, x \in G$.

Dowód: Ad. 1. Niech $X \in \mathfrak{g}$ i $h_X : \mathbb{R} \to G$ będzie odpowiednią grupą jednoparametrową. Wtedy $\exp(X) = h_X(1)$, ale odwzorowanie $h : t \mapsto \Phi(h_X(t)) : \mathbb{R} \to H$ (jako złożenie homomorfizmów gładkich) jest jednoparametrową podgrupą w H. Z drugiej strony $\frac{d}{dt}|_{t=0} h(t) = (\Phi_*)|_e(\frac{d}{dt}|_{t=0} h_X) = (\Phi_*)|_e X$, czyli $h = h_{(\Phi_*)|_e X}$.

Ad. 2. Zastosujmy p. 1 do gładkiego homomorfizmu grup Liego $\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g})$.

Ad. 3. Zastosujmy p. 1 do gładkiego homomorfizmu grup Liego $A_x : G \to G$. $\square$

Literatura

[Ada69] J. Frank Adams, *Lectures on Lie groups*, Benjamin, 1969.

[DK00] J. Duistermaat and J. Kolk, *Lie groups, Universitext*, Springer, 2000.

[Tra] Andrzej Trautman, *Grupy oraz ich reprezentacje*, Skrypt do wykładu, dostępne na http://www.fuw.edu.pl/ amt.