Teoria grup II

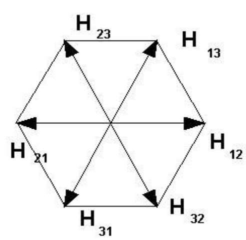
Wykład 13

1 O klasyfikacji półprostych algebr Liego

Literatura dodatkowa: [Hel00]

Graf Coxetera i schemat Dynkina układu pierwiastków: Niech $C = ||c_{ij}||$ będzie macierzą Cartana układu pierwiastków R odpowiadającą bazie $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$. *Grafem Coxetera* układu R nazywamy graf o l wierzchołkach, przy czym wierzchołki i-ty i j-ty połączone są za pomocą $a_{ij}a_{ji}$ neprzecinających się odcinków. Jeśli nad i-tym wierzchołkiem dopiszemy jeszcze wielokrotność $(\alpha_i|\alpha_i)$ otrzymamy *diagram Dynkina.*

PRZYKŁAD: $(\mathfrak{a}_2)$

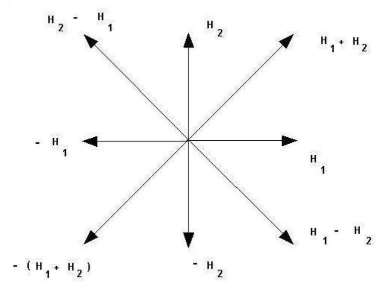


Dla bazy $B = \{\alpha_1 = H_{12}, \alpha_2 = H_{23}\}$ i macierzy

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

mamy

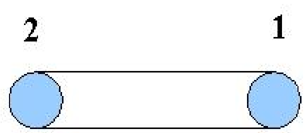
PRZYKŁAD: ($\mathfrak{b}_2$)



Dla bazy $B = \{\alpha_1 = H_1 - H_2, \alpha_2 = H_2\}$ i macierzy

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

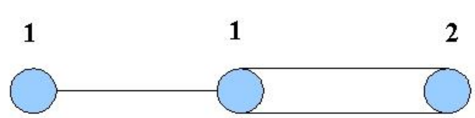
mamy



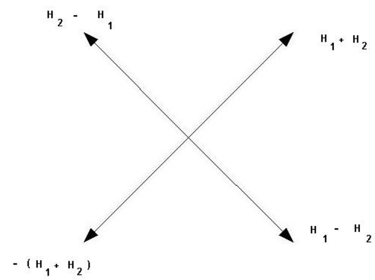
PRZYKŁAD: ($\mathfrak{c}_3$) Dla bazy $\alpha_1 = H_1 - H_2, \alpha_2 = H_2 - H_3, \alpha_3 = 2H_3$ i macierzy

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

mamy



PRZYKŁAD: ($\mathfrak{d}_2$)



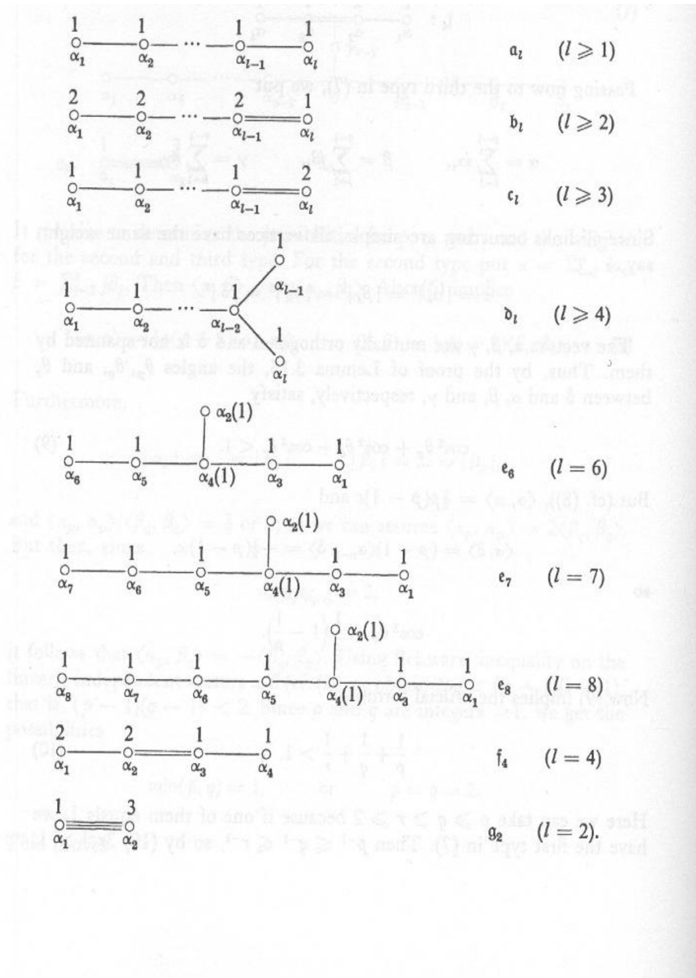
Dla bazy $\alpha_1 = H_1 + H_2, \alpha_2 = H_1 - H_2$ i macierzy

$$C = \left[\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{array} \right]$$

mamy

W ostatnim przykładzie otrzymaliśmy niespójny graf, co odzwierciedla przywiedlność odpowiedniego układu pierwiastków. W ogólności, nieprzywiedlnym układom pierwiastków odpowiadają spójne grafy Coxetera.

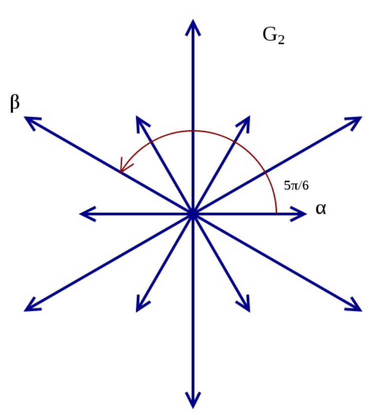
Klasyfikacja diagramów Dynkina: Poniżej przeliczone są wszystkie spójne diagramy Dynkina (listę tę przyjmujemy bez dowodu). Ponieważ diagram Dynkina w sposób jednoznaczny definiuje odpowiednią macierz Cartana, w ten sposób otrzymujemy klasyfikację nieprzywiedlnych układów pierwiastków.



(Ilustracja z książki [Hel00].) Na liście tej znajdujemy 4 nieskończone serii diagramów odpowiadające układom pierwiastków, z którymi już jesteśmy zaznajomieni oraz pięć innych diagramów odpowiadających tzw. wyjątkowym układom pierwiastków. Wśród ostatnich przykładowo rozpatrzymy diagram $\mathfrak{g}_2$. Odpowiednia macierz Cartana ma postać

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

a układ pierwiastków wygląda następująco:



(ilustracja z Wikipedii).

Macierz Cartana a generatory kanoniczne półprostej algebry Liego:

Twierdzenie *Niech $\mathfrak{g}$ będzie półprostą algebrą Liego nad $\mathbb{C}$, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ jej podalgebrą Cartana, a $C = ||a_{ij}||$ macierzą Cartana odpowiadająca pewnej bazie $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ układu pierwiastków $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Wtedy istnieją elementy $X_i, Y_i, H_i \in \mathfrak{g}, i = 1, \ldots, l$, o własnościach:*

1. $[H_i, H_j] = 0$;
2. $[X_i, Y_i] = H_i$;
3. $[X_i, Y_j] = 0$, *jeśli* $i \neq j$;
4. $[H_i, X_j = a_{ji}X_j, [H_i, Y_i] = -a_{ij}Y_j$;
5. $(\mathrm{ad}_{X_i})^{1-a_{ij}}X_j = 0, i \neq j$;
6. $(\mathrm{ad}_{Y_i})^{1-a_{ij}}Y_j = 0, i \neq j$;
7. *elementy* X_i, Y_i, H_i *generują* $\mathfrak{g}$ *(czyli każdy element z* $\mathfrak{g}$ *jest kombinacją liniową wielokrotnych nawiasów tych elementów).*

Dowód: Przypomnijmy, że dla $\alpha, \beta \in \Delta$ mamy

$$[g^{\alpha}, \mathfrak{g}^{\beta}] = \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}, \text{ jeśli } \alpha + \beta \in \Delta \cup \{0\} \tag{1}$$

(lub $= 0$, w przeciwnym wypadku). Niech $H_i := (2/(\alpha_i|\alpha_i))H_{\alpha_i}, X_i$ będzie dowolnym niezerowym wektorem z $\mathfrak{g}^{\alpha_i}$, a $Y_i \in g^{-\alpha_i}$ dobierzemy tak, żeby $B_{\mathfrak{g}}(X_i, Y_i) = (2/(\alpha_i|\alpha_i))$. Wtedy relacje 1,2 są oczywiste, relacja 3 wynika z faktu, że $\alpha_i - \alpha_j$ nie jest pierwiastkiem (zob. dowód jednego z lematów w Wykładzie 12). Relacje 4 wynikają z tego, że $[H, X_j] = \alpha_j(H)X_j$ dla $H \in \mathfrak{h}$ oraz $\alpha_j(H_i) = (2/(\alpha_i|\alpha_i))(\alpha_j|\alpha_j) = a_{ji}$. Relacje 5 i 6 są wnioskiem faktu, że α_i szereg zawierający α_j ma postać $\alpha_j, \alpha_j + \alpha_i, \ldots, \alpha_j - a_{ji}\alpha_i$, czyli $\alpha_j + (1 - a_{ji})\alpha_i$ nie jest pierwiastkiem. Ostatni punkt wynika z tego, że H_i tworzą bazę $\mathfrak{h}$ oraz z równości (1) (z uwzględnieniem faktu, że każdy pierwiastek jest kombinacją bazowych). $\square$

Klasyfikacja półprostych zespolonych algebr Liego:

Twierdzenie *Niech R będzie układem pierwiastków. Wtedy istnieje zespolona półprosta algebra Liego $\mathfrak{g}$ oraz podalgebra Cartana $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ takie, że $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.*

Idea dowodu: Niech $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ będzie bazą układu R, a $C = ||a_{ij}||, a_{ij} = a_{\alpha_i\alpha_j}$ odpowiednią macierzą Cartana. Dowód twierdzenia z grubsza polega na zbudowaniu algebry Liego generowanej przez elementy $X_i, Y_i, H_i \in \mathfrak{g}, i = 1, \ldots, l$, podlegające relacjom z poprzedniego twierdzenia. $\square$

Literatura

[Hel00] Sigudur Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, AMS, 2000.