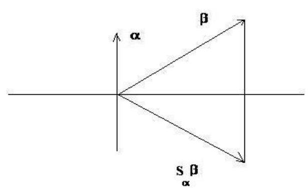
Teoria grup II

Wykład 12

1 Abstrakcyjne układy pierwiastków

Literatura dodatkowa: [Hel00]

Odbicie euklidesowej przestrzeni wektorowej $(V, (|))$ **wzdłuż wektora** $\alpha \in V, \alpha \neq 0$**:** Jest to przekształcenie ortogonalne zadane wzorem $s_\alpha \beta = \beta - a_{\beta,\alpha}\alpha$, gdzie $a_{\beta,\alpha} = 2(\beta|\alpha)/(\alpha|\alpha)$.



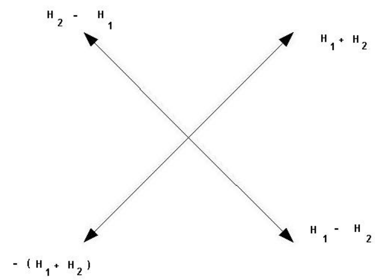
Układ pierwiastków w $(V, (|))$**:** Jest to skończony zbiór $R \subset V$ o własnościach:

1. R generuje V;
2. dla każdego $\alpha \in R$ odbicie s_α przestrzeni V wzdłuż α zachowuje R;
3. jedyne pierwiastki proporcjonalne do $\alpha \in R$ to $\alpha, 0, -\alpha$;
4. dla wszystkich $\alpha, \beta \in R$ liczby $a_{\beta,\alpha}$ określone wzorem $s_\alpha \beta = \beta - a_{\beta,\alpha}\alpha$ są *całkowite*.

Mówimy, że układ pierwiastków $R \subset V$ jest *nieprzywiedlny*, jeśli nie istnieje rozkładu $V = V_1 \oplus V_2$ w ortogonalną sumę prostą taką, że $R_1 := R \cap V_1$ oraz $R_2 := R \cap V_2$ są układami pierwiastów w V_1, V_2 odpowiednio i $R = R_1 \cup R_2$.

Przykład: Zbiór wektorów pierwiastkowych $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) := \{H_\alpha \mid \alpha \in \Delta \cup \{0\}\} \subset \mathfrak{h}_\mathbb{R}$ półprostej zespolonej algebry Liego względem podalgebry Cartana $\mathfrak{h}$ jest układem pierwiastków. Istotnie, w lemacie z Wykładu 10 pokazaliśmy niezmienniczość $R \subset \mathfrak{h}$ względem odbić s_α w płaszczyznach $\alpha = 0, \alpha \in \Delta$. Odbicia te zadawane są wzorem $s_\alpha(H) = H - 2\frac{\alpha(H)}{\alpha(H_\alpha)}H_\alpha$, gdzie $-2\frac{\alpha(H)}{\alpha(H_\alpha)} = -2\frac{B_\mathfrak{g}(H_\alpha, H_\beta)}{B_\mathfrak{g}(H_\alpha, H_\alpha)} = p + q$ jest liczbą całkowitą. Spełnienie warunku 3. wynika z tegoż lematu.

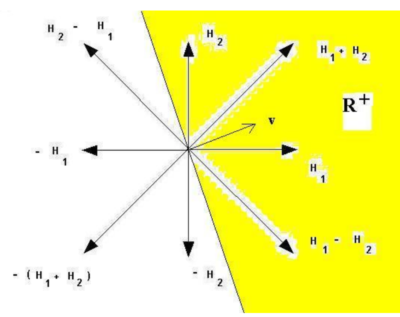
Układ pierwiastków algebry $\mathfrak{d}_2$



nie jest nieprzywiedlny. Układy w pozostałych przykładach ($\mathfrak{a}_n, \mathfrak{b}_n, \mathfrak{c}_n$ oraz $\mathfrak{d}_n, n > 2$) są.

Pierwiastki dodatnie i proste: Wybierzmy element $v \in V, v \neq 0$ taki, że $v^\perp \cap R = \{0\}$ (tutaj $v^\perp$ jest hiperpłaszczyzną prostopadłą do v; możemy wybrać takie v, bo R jest skończony). Zbiór pierwiastków leżących po tej samej stronie od $v^\perp$ co i v oznaczmy przez R^+. Będziemy je nazywać pierwiastkami *dodatnimi*. Pierwiastki ze zbioru $R^- := R \backslash (R^+ \cup \{0\})$ nazywamy *ujemnymi*. Mówimy, że $\alpha \in R^+$ jest pierwiastkiem *prostym*, jeśli on nie może być zapisany w postaci $\alpha = \beta + \gamma, \beta, \gamma \in R^+$.

PRZYKŁAD:



LEMAT *Niech α, β będą pierwiastkami prostymi, $\alpha \neq \beta$. Wtedy $(\alpha|\beta) \leq 0$.*

Dowód: Najpierw zauważmy, że $\gamma := \beta - \alpha \notin R$. Istotnie, gdyby $\gamma \in R^+$, to $\beta = \alpha + \gamma$ byłby sumą pierwiastków dodatnich, co jest sprzeczne z założeniem prostoty α. Podobnie, gdyby $\gamma \in R^-$, to $\alpha = \beta + (-\gamma)$ byłby sumą pierwiastków dodatnich.

Stąd wnioskujemy, że dla α-szeregu $\{\beta + n\alpha \mid p \leq n \leq q\}$, zawierającego β mamy $q = 0, p \geq 0$ (pojęcie α-szeregu dla abstrakcyjnych układów pierwiastków określa się analogicznie, jak dla układów $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ i ma analogiczne własności; w szczególności n przebiega *wszystkie* liczby całkowite pomiędzy p i q, oraz $-2(\beta|\alpha)/(\alpha|\alpha) = p + q$). Ostatecznie mamy $(\beta|\alpha) = -(1/2)(\alpha|\alpha)(p+q) \leq 0$. □

Baza układu pierwiastków R: Jest to podzbiór $B \subset R$ o własnościach: 1) B jest bazą V; 2) każdy pierwiastek $\beta \in R$ może być zapisany w postaci $\beta = \sum_{\alpha \in R} n_\alpha \alpha$, gdzie n_α sa liczby całkowite tego samego znaku.

LEMAT *Każdy układ pierwiastków R posiada bazę.*

Dowód: Niech B będzie zbiorem pierwiastków prostych. Wtedy jest to układ liniowo niezależny. Istotnie, załóżmy przeciwne. Wtedy istnieją $x_i \neq 0, i \in I$, takie, że $\sum x_i \alpha_i = 0$ dla pewnych $\alpha_i \in B$. Podzielmy te współczynniki na dodatnie i ujemne: $I = I' \cup I'', x_i > 0, i \in I', x_j < 0, j \in I''$. Dla

$\gamma := \sum_{i\in I'} x_i\alpha_i$ mamy $0 < (\gamma|\gamma) = \sum_{i\in I', j\in I''} x_i(-x_j)(\alpha_i|\alpha_j)$. Ostatnie wyrażenie jest ujemne według powyższego lematu, co daje sprzeczność.

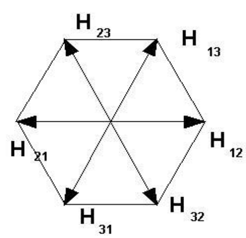
Teraz niech $\gamma \in R^+$. Jeśli γ nie jest prosty, możemy go rozłożyć: $\gamma = \alpha+\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$. Działając indukcyjnie, dojdziemy do rozkładu $\gamma = \sum_{\alpha\in B} n_\alpha \alpha, n_\alpha \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Jeśli $\gamma \in R^-$, to $-\gamma \in R^+$ i powtarzamy rozumowanie.

Jasne jest, że, ponieważ R generuje V, to i B też. $\square$

Macierz Cartana układu pierwiastków: Niech $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ będzie dowolną bazą R. *Macierzą Cartana* układu pierwiastków R związaną z B nazywamy macierz C o wyrazach $a_{ij} := a_{\alpha_i,\alpha_j}$.

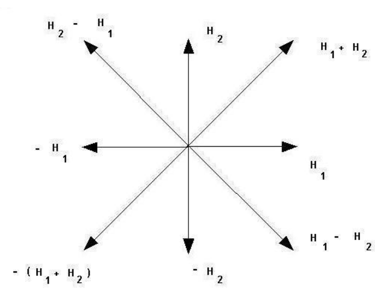
PRZYKŁAD: ($\mathfrak{a}_2$) Dla bazy $B = \{\alpha_1 = H_{12}, \alpha_2 = H_{23}\}$ mamy macierz

$$C = 2\begin{bmatrix} (\alpha_1|\alpha_1)/(\alpha_1|\alpha_1) & (\alpha_1|\alpha_2)/(\alpha_2|\alpha_2) \\ (\alpha_2|\alpha_1)/(\alpha_1|\alpha_1) & (\alpha_2|\alpha_2)/(\alpha_2|\alpha_2) \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & \frac{||\alpha_1||\cdot||\alpha_2||\cos(2\pi/3)}{||\alpha_2||^2} \\ \frac{||\alpha_2||\cdot||\alpha_1||\cos(2\pi/3)}{||\alpha_1||^2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$



PRZYKŁAD: ($\mathfrak{b}_2$) Dla bazy $B = \{\alpha_1 = H_1 - H_2, \alpha_2 = H_2\}$ mamy macierz

$$C = 2\begin{bmatrix} (\alpha_1|\alpha_1)/(\alpha_1|\alpha_1) & (\alpha_1|\alpha_2)/(\alpha_2|\alpha_2) \\ (\alpha_2|\alpha_1)/(\alpha_1|\alpha_1) & (\alpha_2|\alpha_2)/(\alpha_2|\alpha_2) \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & \frac{||\alpha_1||\cdot||\alpha_2||\cos(3\pi/3)}{||\alpha_2||^2} \\ \frac{||\alpha_2||\cdot||\alpha_1||\cos(3\pi/4)}{||\alpha_1||^2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$



Jak C i B wyznaczają R: Niech $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ oraz $C := ||a_{ij}||$. Każdy pierwiastek $\beta \in \mathbb{R}^+$ ma postać $\beta = \sum_i n_i\alpha_i$. Liczbę $\sum_i n_i$ nazywamy wysokością pierwiastka β. W szczególności pierwiastki wyskości 1 są elementami bazy B.

Według B i C budujemy wszystkie α_i-szeregi zawierające α_j:

$$\alpha_j, \alpha_j + \alpha_i, \ldots, \alpha_j + a_{ji}\alpha_i$$

(z dowodu pierwszego z powyższych lematów wiemy, że $\alpha_j - \alpha_i$ nie jest pierwiastkiem, więc $p = 0, q = a_{ji}$). W szczególności, otrzymujemy wszystkie pierwiastki wysokości 2: $\alpha = \alpha_j + \alpha_i$. Ponadto z C odczytujemy wartość $a_{\alpha,\alpha_k} = 2(\alpha|\alpha_k)/(\alpha_k|\alpha_k) = a_{jk} + a_{ik}$. W rezultacie mamy wszystkie α_k-szeregi zawierające α i zawierające się w R^+: $\alpha + p\alpha_k, \ldots, \alpha + q\alpha_k$, gdzie $p = 0$ (jeśli $k \notin \{i,j\}$) lub $p = -1$ (jeśli $k \in \{i,j\}$), a q wyznaczamy z równości $p + q = -a_{\alpha,\alpha_k}$. W ten sposób otrzymujemy wszystkie pierwiastki wysokości 3.

Iterując ten proces otrzymamy pierwiastki wszystkich wysokości. Trzeba tylko pokazać, że w układach pierwiastków „przyjmują się" wszystkie wysokości pomiędzy 1 a maksymalną. To przyjmujemy bez dowodu.

Przykład: Niech $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$. Wtedy mamy następujące α_i-szeregi zawierające α_i: 1) $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2$; 2) $\alpha_2, \alpha_2 + \alpha_1$; 3) $\alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3$; 4) $\alpha_3, \alpha_3 + \alpha_2, \alpha_3 + 2\alpha_2$.

Otrzymaliśmy 2 pierwiastki wysokości 2. Rozważmy $\alpha := \alpha_1 + \alpha_2$, wtedy α_3-szereg zawierający α to $\alpha, \alpha + \alpha_3$, ($q = -a_{\alpha,\alpha_3} = -(a_{13} + a_{23}) = 1$). Dla $\alpha = \alpha_2 + \alpha_3$ mamy α_1-szereg $\alpha, \alpha + \alpha_1$ ($q = -(a_{21} + a_{31}) = 1$).

Otrzymaliśmy 2 pierwiastki wysokości 3. Niech $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$. Wtedy α_2-szereg zawierający α to $\alpha, \alpha + \alpha_2$ (bo $p = 0, q = -a_{\alpha,\alpha_2} - q = -(a_{12} + a_{22} + a_{32}) = 1$).

Niech $\alpha = \alpha_3 + 2\alpha_2$. Wtedy α_1-szereg zawierający α to $\alpha, \alpha + \alpha_1, \alpha + 2\alpha_1$ (bo $p = 0, q = -a_{\alpha,\alpha_1} - q = -(a_{31} + 2a_{21}) = 2$).

Ostatecznie, otrzymaliśmy następujący układ pierwiastków dodatnich: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 + 2\alpha_2, +\alpha_3$. Układ ten odpowiada algebrze $\mathfrak{c}_3$: wystarczy wziąć $\alpha_1 = H_1 - H_2, \alpha_2 = H_2 - H_3, \alpha_3 = 2H_3$.

Następne twierdzenie pokazuje, że rekonstruowanie układu R z B i C jest jednoznaczne.

Twierdzenie *Niech $R, R' \subset V'$ będą układami pierwiastków z bazami $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l,\}B' = \{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_l\}$. Oznaczmy $a_{ij} := a_{\alpha'_i,\alpha'_j}, a_{i'j'} := a_{\alpha'_i,\alpha'_j}$. Jeśli $a_{ij} = a_{i'j'}$, to odwzorowanie $\alpha_i \mapsto \alpha_{i'}$ przedłużone według liniowości na całe V (które oznaczamy przez ϕ) odwzorowuje bijektywnie V na V' oraz R na R'.*

Idea dowodu: Grupę Weyla układu pierwiastków R definiujemy jako podgrupę grupy izometrii przestrzeni V generowaną przez odbicia $s_\alpha, \alpha \in R$, i oznaczamy przez $W(R)$.

Dalej dowodzimy, że grupa Weyla tak naprawdę jest generowana przez „odbicia proste" $s_\alpha, \alpha \in B$, oraz że $W(R)B = R$.

Warunek $a_{ij} = a_{i'j'}$ następnie implikuje, że ϕ „komutuje z odbiciami prostymi": $\phi \circ s_\alpha = s_{\alpha'} \circ \phi, \alpha \in B$, oraz ze wszystkimi: $\phi \circ s_\alpha = s_{\phi(\alpha)} \circ \phi, \alpha \in R$. To daje $\phi(R) = \phi(W(R)B) = W(R')\phi(B) = W(R')B' = R'$. $\square$

Literatura

[Hel00] Sigudur Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, AMS, 2000.