Teoria grup II

Wykład 11

1 Istotność układu pierwiastków. Formy rzeczywiste zespolonych półprostych algebr Liego

Literatura dodatkowa: [Hel00]

Część rzeczywista podalgebry Cartana:

Lemat *Niech $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} := \sum_{\alpha\in\Delta} \mathbb{R}H_\alpha$. Wtedy*

1. *Ograniczenie $b_{\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}}$ formy Killinga $B_{\mathfrak{g}}$ do $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \times \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ jest dodatnio określoną formą rzeczywistą.*

2. *$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} + i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ (suma prosta).*

Dowód: Ad. 1. Dla $H, H' \in \mathfrak{h}$ mamy $B_{\mathfrak{g}}(H, H') = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_H \circ \mathrm{ad}_{H'}) = \sum_{\beta\in\Delta} \beta(H)\beta(H')$ (ostatnia równość obowiązuje ponieważ w bazie $\mathfrak{g}$ złożonej z dowolnej bazy $\mathfrak{h}$ oraz wektorów $E_\beta, \beta \in \Delta$, macierz operatora ad_H ma postać blokową postaci $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$, gdzie D jest macierzą diagonalna o wyrazach $\beta(H)$ na diagonali (wartości własne odpowiadające wektorom własnym E_β). Z lematu w Wykładzie 10 wiemy, że $-2\frac{\beta(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)} = p(\beta,\alpha) + q(\beta,\alpha)$, gdzie $p(\beta,\alpha), q(\beta,\alpha) \in \mathbb{Z}$. Stąd

$$\alpha(H_\alpha) = B_{\mathfrak{g}}(H_\alpha, H_\alpha) = \sum_{\beta\in\Delta} \beta^2(H_\alpha) = \frac{1}{4}\sum_{\beta\in\Delta} \alpha^2(H_\alpha)(p(\beta,\alpha) + q(\beta,\alpha))^2.$$

Dalej obliczamy $\alpha(H_\alpha)$ (o którym już wiemy, że jest $\neq 0$) i widzimy, że $\alpha(H_\alpha)$ jest rzeczywiste (i dodatnie), co daje też rzeczywistość $\beta(H_\alpha)$ (znowu korzystamy ze wzoru z lematu). W konsekwencji mamy rzeczywistość $\beta(H)$ dla $H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ (bo każde takie H jest kombinacją liniową H_α o współczynnikach rzeczywistych), oraz $B_{\mathfrak{g}}(H, H')$ dla $H, H' \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$.

Żeby udowodnić niezdegenerowaność $B_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}\times\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}}$ zauważmy, że ma miejsce implikacja $\alpha(H) = 0 \forall\alpha \in \Delta \Longrightarrow H = 0$. Istotnie, niech $\alpha(H) = 0$ dla wszystkich $\alpha \in \Delta$. Z rozkładu $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}^\alpha$ wynika wtedy, że $[H, X] = 0$ dla wszystkich $X \in \mathfrak{g}$, czyli H jest elementem centrum, które jest trywialne.

Niech teraz $H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ będzie takie, że $B_{\mathfrak{h}}(H, H') = 0$ dla wszystkich $H' \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. Wtedy w szczególności $B_{\mathfrak{h}}(H, H) = \sum_{\beta\in\Delta} \beta^2(H) = 0$ skąd $\beta(H) = 0$ dla dowolnego $\beta \in \Delta$.

Ad. 2. Bez dowodu. □

Istotność układu pierwiastków:

Twierdzenie *Niech* $\mathfrak{g}$ *i* $\mathfrak{g}'$ *będą dwiema półprostymi algebrami Liego (nad* $\mathbb{C}$*), a* $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'$ *ich podalgebrami Cartana. Niech* Δ, Δ' *będą odpowiednimi układami pierwiastków niezerowych i niech* $\mathfrak{h}_\mathbb{R} := \sum_{\alpha\in\Delta} \mathbb{R}H_\alpha, \mathfrak{h}'_\mathbb{R} := \sum_{\alpha'\in\Delta'} \mathbb{R}H_{\alpha'}$ *(możemy patrzeć na* Δ, Δ' *jako na podzbiory w przestrzeniach dualnych* $\mathfrak{h}^*_\mathbb{R}, (\mathfrak{h}'_\mathbb{R})^*$*, ponieważ* $\beta(H), \beta'(H') \in \mathbb{R}$ *dla* $\beta \in \Delta, \beta' \in \Delta', H \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}, H' \in \mathfrak{h}'_\mathbb{R}$*).*

Załóżmy, że istnieje $\mathbb{R}$*-liniowy izomorfizm* $\phi : \mathfrak{h}_\mathbb{R} \to \mathfrak{h}'_\mathbb{R}$ *taki, że* $\phi^*(\Delta') = \Delta$*, gdzie* $\phi^* : (\mathfrak{h}'_\mathbb{R})^* \to \mathfrak{h}^*_\mathbb{R}$ *jest odwzorowaniem dualnym. Wtedy istnieje* $\mathbb{C}$*-izomorfizm algebr Liego* $\Phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ *taki, że* $\Phi|_{\mathfrak{h}_\mathbb{R}} = \phi$*.*

Idea dowodu: Najpierw wybiera się wektory $E_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha, \alpha \in \Delta$, tak, żeby $B_\mathfrak{g}(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1$ (można to zrobić, ponieważ $B_\mathfrak{g}(X_\alpha, X_{-\alpha}) \neq 0$ dla niezerowych $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha, X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$). Dla każdej pary $\alpha, \beta \in \Delta$ takiej, że $\alpha + \beta \in \Delta$ istnieje niezerowe $N_{\alpha,\beta} \in \mathbb{C}$ takie, że $[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha,\beta}E_{\alpha+\beta}$.

Dalej konstruuje się wektory $E_{\alpha'} \in \mathfrak{g}'^{\alpha'}, \alpha' \in \Delta'$, takie, że: 1) $B_{\mathfrak{g}'}(E_{\alpha'}, E_{-\alpha'}) = 1$; 2) $[E_{\alpha'}, E_{\beta'}] = N_{\alpha,\beta}E_{\alpha'+\beta'}$, gdzie $\alpha = \phi^*(\alpha'), \beta = \phi^*(\beta')$. Stosuje się do tego własności współczynników $N_{\alpha,\beta}$ wynikające z tożsamości Jacobiego oraz specjalną indukcję.

Odwzorowanie przedłużające ϕ wzorem $\Phi : E_\alpha \mapsto E_{\alpha'}$ będzie szukanym izomorfizmem algebr Liego. Istotnie, $\Phi[H, E_\alpha] = \Phi\alpha(H)E_\alpha = \alpha(H)E_{\alpha'} = \alpha'(\phi H)E_{\alpha'} = [\Phi H, \Phi E_\alpha]$. Dla $\alpha, \beta \in \Delta$ takich, że $\alpha + \beta \in \Delta$ mamy $\Phi[E_\alpha, E_\beta] = \Phi N_{\alpha,\beta}E_{\alpha+\beta} = N_{\alpha,\beta}E_{\alpha'+\beta'} = [E_{\alpha'}, E_{\beta'}] = [\Phi E_\alpha, \Phi E_\beta]$. Na koniec $\Phi[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \Phi B_\mathfrak{g}(E_\alpha, E_{-\alpha})H_\alpha = \Phi H_\alpha = H_{\alpha'} = [E_{\alpha'}, E_{-\alpha'}] = [\Phi E_\alpha, \Phi E_{-\alpha}]$. $\square$

Kompleksyfikacja, urzeczywistnienie i formy rzeczywiste algebr Liego: Niech $(\mathfrak{g}, [,])$ będzie algebrą Liego nad $\mathbb{R}$. Wtedy nawias $[,]$ jednoznacznie przedłuża się do zespolonego nawiasu Liego na kompleksyfikacji $\mathfrak{g}^\mathbb{C} = \mathbb{C} \otimes_\mathbb{R} \mathfrak{g} = \mathfrak{g} + i\mathfrak{g}$ przestrzeni $\mathfrak{g}$ wzorem $[X' + iX'', Y' + iY''] = [X', Y'] - [X'', Y''] + i([X', Y''] + [X'', Y'])$. Przestrzeń $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$ z tym nowym nawiasem nazywamy *kompleksyfikacją* algebry Liego $(\mathfrak{g}, [,])$.

Przykład: Algebry Liego $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}), \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}), \mathfrak{so}(n, \mathbb{C}), \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$ są kompleksyfikacjami odpowiednich rzeczywistych algebr Liego $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}), \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}), \mathfrak{so}(n, \mathbb{R}), \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$. Istotnie, jeśli $X = X' + iX'', Y = Y' + iY'' \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, nawias $[X, Y]$ spełnia powyższy wzór.

Urzeczywistnieniem $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ zespolonej algebry Liego $\mathfrak{g}$ nazywamy tę algebrę rozumianą jako algebrę nad $\mathbb{R}$.

Lemat *1. Niech* $\mathfrak{g}$ *będzie algebrą Liego nad* $\mathbb{R}$*. Wtedy* $B_\mathfrak{g}(X, Y) = B_{\mathfrak{g}^\mathbb{C}}(X, Y)$ *dla* $X, Y \in \mathfrak{g}$*.*

2. Niech $\mathfrak{h}$ *będzie algebrą Liego nad* $\mathbb{C}$*. Wtedy* $B_{\mathfrak{h}_\mathbb{R}}(X, Y) = 2\operatorname{Re} B_\mathfrak{h}(X, Y)$ *dla* $X, Y \in \mathfrak{h}$*.*

Dowód: Punkt pierwszy jest oczywisty. Żeby dowieść drugi, zauważmy, że jeśli $L : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ jest operatorem $\mathbb{C}$-liniowym, a $P+iQ := [L]_e$ jest macierzą tego operatora w pewnej bazie $e = (e_1, \ldots, n)$, to macierz operatora $L_\mathbb{R}$ (czyli operatora rozumianego jako operator $\mathbb{R}$-liniowy) w bazie $(e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_n)$ jest równa

$$\begin{bmatrix} P & -Q \\ Q & P \end{bmatrix}.$$

Stąd $\operatorname{Tr} L_\mathbb{R} = 2\operatorname{Re}\operatorname{Tr} L$. $\square$

Ćwiczenie: Wywnioskuj z lematu, że: 1) $\mathfrak{g}$ jest półprosta wtedy i tylko wtedy gdy $\mathfrak{g}^\mathbb{C}$ jest półprosta; 2) $\mathfrak{h}$ jest półprosta wtedy i tylko wtedy gdy $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ jest półprosta.

Formą rzeczywistą zespolonej algebry Liego $\mathfrak{g}$ nazywamy taką rzeczywistą algebrę Liego $\mathfrak{h}$, że $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}^\mathbb{C}$. Równoważnie, forma rzeczywista jest podalgebrą algebry $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ taką, że $\mathfrak{g}_\mathbb{R} = \mathfrak{h} + i\mathfrak{h}$ (suma prosta przestrzeni wektorowych).

Rozważmy odwzorowanie $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ dane wzorem $X' + iX'' \mapsto X' - iX'', X', X'' \in \mathfrak{h}$. Ma ono następujące własności: 1) $\sigma^2 = \mathrm{Id}$; 2) jest antyliniowe; 3) $\sigma[X,Y] = [\sigma X, \sigma Y], X, Y \in \mathfrak{g}$.

Odwrotnie, każde takie odwzorowanie zadaje pewną formę rzeczywistą algebry Liego $\mathfrak{g}$. Istotnie, niech $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^\sigma = \{X \in \mathfrak{g} \mid \sigma(X) = X\}$. *Ćwiczenie:* Udowodnij, że $\mathfrak{h}$ jest podalgebrą w $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ oraz, że $\mathfrak{g}_\mathbb{R} = \mathfrak{h} + i\mathfrak{h}$.

Jedna algebra zespolona może mieć kilka *nie izomorficznych* form rzeczywistych.

TWIERDZENIE *Każda półprosta algebra Liego* $\mathfrak{g}$ *nad* $\mathbb{C}$ *ma* zwartą *formę rzeczywistą.*

Dowód: Wybierzmy $E_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$ tak, żeby $B_\mathfrak{g}(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1$. Wtedy mamy:

$$B(E_\alpha - E_{-\alpha}, E_\alpha - E_{-\alpha}) = -2, B(i(E_\alpha + E_{-\alpha}), i(E_\alpha + E_{-\alpha})) = -2$$

$$B(E_\alpha - E_{-\alpha}, i(E_\alpha + E_{-\alpha})) = 0, B(iH_\alpha, iH_\alpha) < 0.$$

Ostatnia nierówność wynika z lematu o formie rzeczywistej podalgebry Cartana. Niech

$$\mathfrak{g}_{zw} := \sum_{\alpha\in\Delta} \mathbb{R}(iH_\alpha) + \sum_{\alpha\in\Delta} \mathbb{R}(E_\alpha - E_{-\alpha}) + \sum_{\alpha\in\Delta} \mathbb{R}i(E_\alpha + E_{-\alpha}).$$

Żeby pokazać, że jest to podalgebra w $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ wystarczy dowieść, że jeśli $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Delta$, to współczynniki $N_{\alpha,\beta}$ określone przez $[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha,\beta} E_{\alpha+\beta}$ są rzeczywiste. Przyjmujemy to bez dowodu.

Lemat o formie Killinga formy rzeczywistej pokazuje, że $B_{\mathfrak{g}_{zw}}(X,Y) = B_\mathfrak{g}(X,Y), X, Y \in \mathfrak{h}$. Ostatnia forma jest ujemnie określona, co wynika z powyższych (nie)równości. □

PRZYKŁAD: Niech $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$, wtedy $\mathfrak{g}_{zw} = \sum_{j=1}^n R(i(E_{j,j} - E_{j+1,j+1})) + \sum_{j\neq k} \mathbb{R}(E_{jk} - E_{kj}) + \sum_{j\neq k} \mathbb{R}i(E_{jk} + E_{kj})$. Jeśli $A \in \mathfrak{g}_{zw}$, to $-\overline{A}^T = A$, czyli $\sigma(A) = -\overline{A}^T$. Macierze o własności $\sigma(A) = A$ nazywamy *skośnie unitarnymi.* Algebra Liego $\mathfrak{g}_{zw}$ oznacza się $\mathfrak{su}(n)$ i jest algebrą Liego specjalnej unitarnej grupy $SU(n) = \{a \in SL(n,\mathbb{C}) \mid a\bar{a}^T = I\}$.

Na zakończenie zauważmy, że odwzorowanie σ odpowiadające formie rzeczywistej $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ algebry Liego $\mathfrak{g}$ jest dane wzorem $\sigma(A) = \overline{A}$ oraz, że formy $\mathfrak{su}(n)$ i $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ nie są izomorficzne (jedna jest zwarta, druga nie).

Literatura

[Hel00] Sigudur Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, AMS, 2000.