Teoria grup II

Wykład 10

1 Podalgebry Cartana i rozkład na podprzestrzenie pierwiastkowe. Cz. III

Literatura dodatkowa: [Hel00]

Zakończenie dowodu twierdzenia z Wykładu 8: Ad. 5. Niech $\alpha \in \Delta$. Wtedy $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ nie może być zerowe, bo to implikowałoby (na mocy punktu 3) ortogonalność $\mathfrak{g}^{\alpha}$ do całej $\mathfrak{g}$. Stąd $-\alpha \in \Delta$.

Niech $H \in \mathfrak{h}, X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha, X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$. Wiemy, że $[X_\alpha, X_{-\alpha}] \subset \mathfrak{h}$. Ponadto $B_\mathfrak{g}([X_\alpha, X_{-\alpha}], H) = -B_\mathfrak{g}(X_{-\alpha}, [X_\alpha, H]) = B_\mathfrak{g}(X_{-\alpha}, [H, X_\alpha]) = B_\mathfrak{g}(X_{-\alpha}, \alpha(H)X_\alpha) = \alpha(H)B_\mathfrak{g}(X_\alpha, X_{-\alpha}) = B_\mathfrak{g}(H_\alpha, H)$ $B_\mathfrak{g}(X_\alpha, X_{-\alpha}) = B_\mathfrak{g}(B_\mathfrak{g}(X_\alpha, X_{-\alpha})H_\alpha, H)$. Z niezgegenerowaności $B_\mathfrak{g}|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ (punkt 4) wnioskujemy, że

$$[X_\alpha, X_{-\alpha}] = B_\mathfrak{g}(X_\alpha, X_{-\alpha})H_\alpha.$$

Teraz udowodnimy, że $\alpha(H_\alpha) \neq 0$. Niech $E_\alpha := X_\alpha, X_{-\alpha} \neq 0$. Wtedy $B_\mathfrak{g}(X_\alpha, X_{-\alpha}) \neq 0$ (inaczej X_α byłoby ortogonalne do $\mathfrak{g}$). Można tak wybrać wektor $E_{-\alpha}$ proporcjonalny do $X_{-\alpha}$, żeby

$$B_\mathfrak{g}(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1.$$

Dla pierwiastka β oznaczmy $\mathfrak{g}(\beta, \alpha) := \sum_{n\in N} \mathfrak{g}^{\beta+n\alpha}$, gdzie N jest zbiorem tych $n \in \mathbb{Z}$, dla których $\beta + n\alpha$ jest pierwiastkiem. Z tożsamości $[g^{\alpha'}, \mathfrak{g}^{\beta'}] \subset \mathfrak{g}^{\alpha'+\beta'}$ wnioskujemy, że $\mathfrak{g}(\beta, \alpha)$ jest podprzestrzenią niezmienniczą dla $\mathrm{ad}_{E_\alpha}, \mathrm{ad}_{E_{-\alpha}}, \mathrm{ad}_H$. Ponieważ $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha$, mamy

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{H_\alpha}|_{\mathfrak{g}(\beta,\alpha)}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{[E_\alpha, E_{-\alpha}]}|_{\mathfrak{g}(\beta,\alpha)}) = \mathrm{Tr}([\mathrm{ad}_{E_\alpha}, \mathrm{ad}_{E_{-\alpha}}]|_{\mathfrak{g}(\beta,\alpha)}) = 0$$

(ślad dowolnego komutatora jest równy zero).

Z innej strony, ponieważ ad_{H_α} jest operatorem diagonalnym na $\mathfrak{g}(\beta, \alpha)$, mamy

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{H_\alpha}|_{\mathfrak{g}(\beta,\alpha)}) = \sum_{n\in N} (\beta + n\alpha)(H_\alpha) \dim \mathfrak{g}^{\beta+n\alpha}.$$

Stąd $\beta(H_\alpha) \sum_{n\in N} \dim \mathfrak{g}^{\beta+n\alpha} = -\alpha(H_\alpha) \sum_{n\in N} n \dim \mathfrak{g}^{\beta+n\alpha}$ dla każdego $\alpha \in \Delta$ i każdego pierwiastka β. Gdyby $\alpha(H_\alpha) = 0$, mielibyśmy $\beta(H_\alpha) = 0$ (bo $\dim \mathfrak{g}^{\beta+n\alpha} \geq \dim \mathfrak{g}^\beta > 0$). Z kolei to powodowałoby równość $\mathrm{ad}_{H_\alpha}\mathfrak{g}^\beta = 0$ (bo $\mathrm{ad}_{H_\alpha} X_\beta = \beta(H_\alpha)X_\beta, X_\beta \in \mathfrak{g}^\beta$), czyli $\mathrm{ad}_{H_\alpha} = 0$, co jest niemożliwe z powodu trywialności centrum $\mathfrak{g}$.

Ad. 2. Załóżmy, że $\dim \mathfrak{g}^\alpha > 1$. Wtedy istnieje takie $D_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha, D_\alpha \neq 0$, że $B_\mathfrak{g}(D_\alpha, E_{-\alpha}) = 0$. Oznaczmy $D_{-1} := 0, D_n := (\mathrm{ad}_{E_\alpha})^n D_\alpha, n = 0, 1, \ldots$. Wtedy $D_n \in \mathfrak{g}^{(n+1)\alpha}$ oraz $[E_{-\alpha}, D_n] = [E_{-\alpha}, (\mathrm{ad}_{E_\alpha})^n D_\alpha] = \mathrm{ad}_{E_\alpha}[E_{-\alpha}, (\mathrm{ad}_{E_\alpha})^{n-1} D_\alpha] - [\mathrm{ad}_{E_\alpha} E_{-\mathfrak{a}}, (\mathrm{ad}_{E_\alpha})^{n-1} D_\alpha] = \mathrm{ad}_{E_\alpha}[E_{-\alpha}, D_{n-1}] - [H_\alpha, D_{n-1}] =$

$\mathrm{ad}_{E_\alpha}[E_{-\alpha}, D_{n-1}] - n\alpha(H_\alpha)D_{n-1}$. W szczególności, $[E_{-\alpha}, D_{n-1}] = \mathrm{ad}_{E_\alpha}[E_{-\alpha}, D_{n-2}] - (n-1)\alpha(H_\alpha)D_{n-2}$, dlatego $[E_{-\alpha}, D_n] = \mathrm{ad}_{E_\alpha}(\mathrm{ad}_{E_\alpha}[E_{-\alpha}, D_{n-2}] - (n-1)\alpha(H_\alpha)D_{n-2}) - n\alpha(H_\alpha)D_{n-1} = (\mathrm{ad}_{E_\alpha})^2[E_{-\alpha}, D_{n-2}] - (n-1)\alpha(H_\alpha)D_{n-1} - n\alpha(H_\alpha)D_{n-1}$. Stosując indukcję otrzymujemy

$$[E_{-\alpha}, D_n] = (\mathrm{ad}_{E_\alpha})^n[E_{-\alpha}, D_0] - (1 + 2 + \cdots + n)\alpha(H_\alpha)D_{n-1} = -\frac{n(n+1)}{2}\alpha(H_\alpha)D_{n-1}$$

(skorzystaliśmy z tego, że $[E_{-\alpha}, D_0] = [E_{-\alpha}, D_\alpha] = B_{\mathfrak{g}}(E_{-\alpha}, D_\alpha)H_\alpha = 0$). Ponieważ $D_0 \neq 0$, powyższa równość pokazuje, że $D_n \neq 0$ dla $n = 1, 2, \ldots$, co jest niemożliwe (zbiór pierwiastków jest skończony). $\Box$

Dalsze własności pierwiastków i rozkładu na podprzestrzenie pierwiastkowe: Niech $\alpha \in \Delta$, a β będzie dowolnym pierwiastkiem. Zbiór wszystkich pierwiastków postaci $\beta + n\alpha$, $n \in \mathbb{Z}$, nazywamy *α-szeregiem zawierającym β*. Maksymalną z liczb n o tej własności, że $\beta + n\alpha$ jest pierwiastek będziemy oznaczać przez $q = q(\beta, \alpha)$, a minimalna przez $p = p(\beta, \alpha)$.

Lemat *1. $\beta + n\alpha$ jest pierwiastkiem dla każdego $n, p \leq n \leq q$.*

2. $-2\frac{\beta(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)} = p + q$.

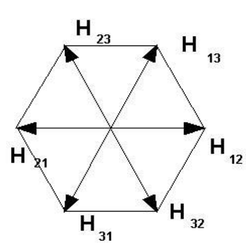
3. α-szereg zawierający 0 jest postaci $-\alpha, 0, \alpha$.

4. Układ pierwiastków Δ jest niezmienniczy ze względu na odbicia podalgebry Cartana $\mathfrak{h}$

$$s_\alpha : H \mapsto H - 2\frac{\alpha(H)}{\alpha(H_\alpha)}H_\alpha$$

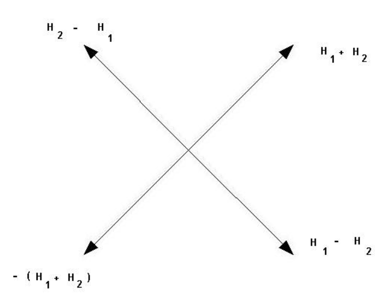
względem hiperpłaszczyzny $\{H \in \mathfrak{h} \mid \alpha(H) = 0\}$.

Przykład:



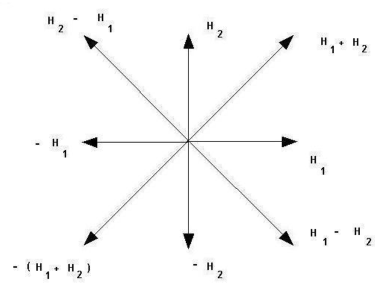
Niech $\alpha := H_{12}, \beta = H_{23}$. Wtedy α-szereg zawierający β to H_{23}, H_{13}, mamy też $p = 0, q = 1$. Podobnie, szereg będą tworzyły dowolne dwa sąsiednie pierwiastki. Są też szeregi jak w p. 2 powyższego lematu.

Przykład:



Tutaj są szeregi wyłącznie jak w p. 2 lematu.

PRZYKŁAD:



Tutaj mamy kilka typów szeregów. Przykładowo, dla $\alpha = H_1, \beta = H_2$ mamy szereg $H_2 - H_1, H_2, H_2 + H_1$ z $p = -1, q = 1$. Dla $\alpha = H_1, \beta = H_1 + H_2$ mamy szereg $H_2 - H_1, H_2, H_2 + H_1$ z $p = -2, q = 0$. Dla $\alpha = H_1, \beta = H_2 - H_1$ mamy $H_2 - H_1, H_2, H_2 + H_1$ z $p = 0, q = 2$. Dla $\alpha = H_2 - H_1, \beta = H_1$ mamy H_1, H_2 z $p = 0, q = 1$. Są też szeregi jak w p. 2 powyższego lematu.

Dowód lematu: Ad. 1,2. Niech $E_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha, E_{-\alpha} \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ będą takie, że $B(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1$. Niech $r, s \in \mathbb{Z}$ będą takie, że $\beta + n\alpha$ jest pierwiastkiem dla dowolnego $n, r \leq n \leq s$, ale nie jest nim dla $n = r-1, s+1$. Taki α-szereg zawierający β nazwiemy *prawidłowym* .

Znowu podprzestrzeń $\mathfrak{g}' := \sum_{n=r}^{s} \mathfrak{g}^{\beta + n\alpha}$ jest niezmiennicza dla operatorów $\mathrm{ad}_{E_\alpha}, \mathrm{ad}_{E_{-\alpha}}, \mathrm{ad}_H$. Ponieważ $H_\alpha = [E_\alpha, E_{-\alpha}]$, mamy $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{H_\alpha}|_{\mathfrak{g}'}) = 0$. Z innej strony, $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{H_\alpha}|_{\mathfrak{g}'}) = \sum_{n=r}^{s} (\beta + n\alpha)(H_\alpha)$ i, ponieważ $\alpha(H_\alpha) \neq 0$, mamy

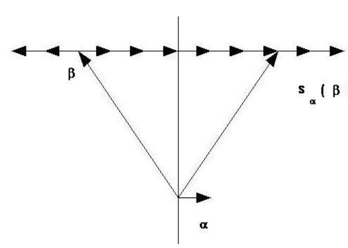
$$\frac{\beta(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)} = -\sum_{n=r}^{s} n = -\frac{r+s}{2}.$$

Jasne, że każdy α-szereg zawierający β składa się z szeregów prawidłowych. Powyższa równość pokazuje, że taki składnik może być tylko jeden.

Ad. 3.- bez dowodu.

Ad. 4. Niech $V, (|)$ będzie przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym. Dla $\alpha \in V^*$ odbicie prostopadłe w hiperpłaszczyznie $\{v \in V \mid \alpha(v) = 0\}$ jest dane wzorem $v \mapsto v - 2\frac{(v|v_\alpha)}{(v_\alpha|v_\alpha)} v$, tutaj v_α definiujemy przez $(v_\alpha|v) = \alpha(v), v \in V$ (*Ćwiczenie*).

Z punktu 2 mamy $s_\alpha(H_\beta) = H_\beta - 2\frac{\alpha(H_\beta)}{\alpha(H_\alpha)} H_\alpha = H_\beta - 2\frac{B_\mathfrak{g}(H_\alpha, H_\beta)}{B_\mathfrak{g}(H_\alpha, H_\alpha)} H_\alpha = H_\beta - 2\frac{\beta(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)} H_\alpha = H_\beta + (p + q)H_\alpha$. Stad wynika, że $p \leq p + q \leq q$, czyli $s_\alpha(H_\beta)$ jest wektorem pierwiastkowym. Istotnie, niech β leży po innej stronie hiperpłaszczyzny $\alpha^\perp$ niż α (utożsamiamy $\mathfrak{h}$ i $\mathfrak{h}^*$ za pomocą $B_\mathfrak{g}|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}}$). Wtedy $p \leq 0, q \geq 0$ i $q \leq p + q \leq q$ (zob. rysunek). Podobnie rozumujemy, jeśli β i α leżą po tej samej stronie.



□

Literatura

[Hel00] Sigudur Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, AMS, 2000.