Teoria grup II

Wykład 1

1 O algebrach Liego grup Liego raz jeszcze. Cz. I

Literatura dodatkowa: [Ada69, Tra, DK00]

Grupa Liego: Jest to grupa (G, μ) taka, że G jest wyposażone w strukturę rozmaitości różniczkowej o tej własności, że działanie grupowe $\mu : G \times G \to G$ oraz odwzorowanie $\epsilon : g \mapsto g^{-1} : G \to G$ są gładkie.

PRZYKŁAD: Niech V będzie przestrzenią wektorową, a $G := GL(V) \subset \mathrm{End}(V)$ będzie grupą odwracalnych endomorfizmów przestrzeni V.

Odwzorowania dołączone: Oznaczmy $\mathfrak{g} := T_eG$ (tutaj $e \in G$ jest elementem neutralnym), a przez $A_g : G \to G$ automorfizm wewnętrzny $A_g(x) := gxg^{-1}, x, g \in G$. Odwzorowanie A_g jest odwzorowaniem gładkim o własności $A_g(e) = e$. W szczególności, mamy odwzorowanie styczne $(A_g)_*|_e : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, które standardowo oznacza się przez Ad_g (lub $\mathrm{Ad}g$, od angielskiego „adjoint”).

LEMAT *Odwzorowanie* $\mathrm{Ad} : g \mapsto \mathrm{Ad}_g : G \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ *jest reprezentacją* G *w przestrzeni wektorowej* $\mathfrak{g}$ *(którą nazywamy reprezentacją* dołączoną *).*

Dowód Łatwo widzieć, że A_g jest odwzorowaniem odwracalnym (z odwrotnym $A_{g^{-1}}$), więc $\mathrm{Ad}_g \in GL(\mathfrak{g})$. Ponadto, $A_{g_1g_2} = A_{g_1}A_{g_2}$, skąd $\mathrm{Ad}_{g_1g_2} = \mathrm{Ad}_{g_1}\mathrm{Ad}_{g_2}$, czyli Ad jest homomorfizmem. □

Zauważmy, że odwzorowanie Ad jest odwzorowaniem gładkim, w szczególności mamy odwzorowanie styczne $\mathrm{Ad}_*|_e : T_eG \to T_IGL(\mathfrak{g})$. Wiemy, że $T_IGL(\mathfrak{g}) = \mathrm{End}(\mathfrak{g})$, otrzymaliśmy więc odwzorowanie $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g}), X \mapsto \mathrm{ad}_X$ (standardowe oznaczenie ad_X lub $\mathrm{ad}X$).

Połóżmy

$$[X, Y] := \mathrm{ad}_X Y, X, Y \in \mathfrak{g}.$$

PRZYKŁAD: Dla $G = GL(V)$ mamy $\mathfrak{g} = T_eG = \mathrm{End}(V)$, a odwzorowanie $A_x : y \mapsto xyx^{-1} : G \to G$ jest ograniczeniem odwzorowania liniowego $Y \mapsto xYx^{-1} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Stąd jego pochodna Ad_x z nim się pokrywa, czyli $\mathrm{Ad}_xY = xYx^{-1}, Y \in \mathfrak{g}$. Obliczymy różniczkę odwzorowania $\mathrm{Ad} : x \mapsto \mathrm{Ad}_x : G \to \mathfrak{g}$ w $e = I$ na wektorze $X \in \mathfrak{g}$ w następujący sposób. Niech $t \mapsto x(t)$ będzie gładką krzywą w G o własności $x(0) = e, x'(0) = X$. Wtedy

$$\mathrm{ad}_X Y = \frac{d}{dt}|_{t=0}(x(t)Y(x(t))^{-1}) = x'(0)Y(x(0))^{-1} + x(0)Y((x(t))^{-1})'|_{t=0} = XY - YX$$

(tutaj skorzystaliśmy z równości $x(t)(x(t))^{-1} = I$ różniczkując którą w zerze, mamy $((x(t))^{-1})'|_{t=0} = -x'(0)$). Innymi słowy, nawias $[X, Y]$ dla endomorfizmów przestrzeni liniowej jest ich komutatorem.

Własności nawiasu $[,]$

TWIERDZENIE *1. Niech G bedzie dowolną grupą Liego, $\mathfrak{g} = T_eG$. Wtedy para $(\mathfrak{g}, [,])$ jest algebrą Liego, czyli nawias $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$*

(a) jest dwuliniowy;

(b) jest antysymetryczny ($[X, Y] = -[Y, X]$ $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$);

(c) spełnia tożsamość Jakobiego ($[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$).

2. Niech G, G' będą grupami Liego, a $\Phi : G \to G'$ będzie gładkim homomorfizmem. Oznaczmy $\phi := \Phi_*|_e : T_eG \to T_{e'}G'$. Wtedy $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ jest homomorfizmem algebr Liego, czyli

$$\phi[X, Y]_{\mathfrak{g}} = [\phi(X), \phi(Y)]_{\mathfrak{g}'} \ \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Dowód Zacznijmy dowód od drugiego punktu. Warunek homomorfizmu dla Φ implikuje

$$\Phi(A_xy) = \Phi(xyx^{-1}) = \Phi(x)\Phi(y)\Phi(x)^{-1} = A_{\Phi(x)}\Phi(y).$$

Przy ustalonym x pierwszy i ostatni człon tego ciągu jest gładkim odwzorowaniem z G w G'. Obliczmy różniczkę tego odwzorowania w punkcie $y = e$ na wektorze $Y \in \mathfrak{g}$, otrzymamy

$$\Phi_*|_{A_xe} \circ \mathrm{Ad}_xY = \phi(\mathrm{Ad}_xY) = \mathrm{Ad}_{\Phi(x)} \circ \Phi_*|_eY = \mathrm{Ad}_{\Phi(x)}\phi(Y).$$

Pozwalając x się zmieniać, otrzymujemy gładkie odwzorowanie z G w $\mathfrak{g}'$. Obliczając jego różniczkę w e na wektorze $X \in \mathfrak{g}$, otrzymujemy

$$\phi(\mathrm{ad}_XY) = \mathrm{ad}_{\phi(X)}\phi(Y).$$

Przystąpmy do dowodu p. 1. Dwuliniowość $[,]$ jest oczywista. Teraz zastosujmy udowodniony fakt do homomorfizmu grup Liego $\mathrm{Ad} : G \to G' = GL(\mathfrak{g})$ oraz skorzystajmy z tego, że nawias $[,]_{\mathfrak{g}'}$ pokrywa się z komutatorem. Otrzymamy równość

$$\mathrm{ad}_{[X,Y]} = \mathrm{ad}_X\mathrm{ad}_Y - \mathrm{ad}_Y\mathrm{ad}_X.$$

która jest równoważna tożsamości Jakobiego w założeniu, że zachodzi antysymetryczność nawiasu (*Ćwiczenie*: udowodnij tę równoważność). Czyli zostało nam udowodnić antysymetryczność.

Rozważmy odwzorowanie $\Psi : G \times G \to G, (x, y) \mapsto xyx^{-1}y^{-1}$. Udowodnimy najpierw, że (e, e) jest punktem krytycznym tego odwzorowania, czyli różniczka $\Psi_*|_{(e,e)}$ znika. Istotnie, mamy $\Psi(x, e) = e, \Psi(e, y) = e$ dla dowolnych $x, y \in G$. Stąd różniczka cząstkowa $\Psi^1_*|_{(e,e)}$ względem pierwszego argumentu znika i różniczka cząstkowa $\Psi^2_*|_{(e,e)}$ względem drugiego argumentu też. Gładkość Ψ gwarantuje znikanie $\Psi_*|_{(e,e)}$.

Teraz obliczmy $\Psi^2_*|_{(x,e)}Y$, gdzie $Y \in \mathfrak{g}$, oraz $\Psi^1_*|_{(e,y)}X$, gdzie $X \in \mathfrak{g}$. Według lematu, który udowodnimy poniżej, $\Psi^2_*|_{(x,e)}Y = \mathrm{Ad}_xY - Y$ oraz $\Psi^1_*|_{(e,y)}X = X - \mathrm{Ad}_yX$. Obliczając różniczkę pierwszego wyrażenia po x na X, a drugiego po y na Y, otrzymujemy ad_XY oraz $-\mathrm{ad}_YX$ odpowiednio. Skądinąd wiemy, że te wyrażenia są równe, ponieważ gładkość odwzorowania gwarantuje symetryczność formy drugich pochodnych w punkcie krytycznym. $\square$

LEMAT 1. $\Psi^2_*|_{(x,e)}Y = \mathrm{Ad}_x Y - Y$;

2. $\Psi^1_*|_{(e,y)}X = X - \mathrm{Ad}_y X$.

Dowód Najpierw zauważmy, że, jeśli $\phi(t), \psi(t)$ są krzywe w G o własnościach $\phi(0) = e = \psi(0), \phi'(0) = \Phi, \psi'(0) = \Psi$, to $\frac{d}{dt}|_{t=0}(\phi(t)\cdot\psi(t)) = \Phi + \Psi$. Istotnie, działanie grupowe $\mu : G \times G \to G$ spełnia tożsamości $\mu(x,e) = x, \mu(e,y) = y$, które implikują równości $\frac{\partial \mu^k(e,e)}{\partial x^j} = \delta^k_j, \frac{\partial \mu^k(e,e)}{\partial y^j} = \delta^k_j$. Tutaj wybraliśmy dowolny lokalny układ współrzędnych na G w otoczeniu e i reprezentujemy odwzorowanie μ przez funkcje $\mu^1, \mu^2, \ldots$ Teraz obliczamy: $\frac{d}{dt}|_{t=0}(\phi(t)\cdot\psi(t)) = \frac{\partial \mu^k(e,e)}{\partial x^j}\Phi^j + \frac{\partial \mu^k(e,e)}{\partial y^j}\Psi^j = \Phi^k + \Psi^k$.

Wybierzmy gładką krzywą $y(t)$ w G o własnościach $y(0) = e, y'(0) = Y$. Wiemy już, że $\frac{d}{dt}|_{t=0}(y(t))^{-1}) = -Y$. Ponadto, z definicji $\frac{d}{dt}|_{t=0}(xy(t)x^{-1}) = \mathrm{Ad}_x Y$.

Oznaczmy $\phi(t) := xy(t)x^{-1}, \psi(t) := (y(t))^{-1}$. Wtedy $\phi(0) = e = \psi(0), \phi'(0) = \mathrm{Ad}_x Y, \psi'(0) = -Y$. Ostatecznie, $\Psi^2_*|_{(x,e)}Y = \frac{d}{dt}|_{t=0}(xy(t)x^{-1}(y(t))^{-1}) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(\phi(t)\cdot\psi(t)) = \mathrm{Ad}_x Y - Y$. Drugi wzór dowodzi się analogicznie. $\square$

Literatura

[Ada69] J. Frank Adams, *Lectures on Lie groups*, Benjamin, 1969.

[DK00] J. Duistermaat and J. Kolk, *Lie groups, Universitext*, Springer, 2000.

[Tra] Andrzej Trautman, *Grupy oraz ich reprezentacje*, Skrypt do wykładu, dostępne na http://www.fuw.edu.pl/ amt.