Teoria grup II

Andriy Panasyuk

Spis treści

1 O algebrach Liego grup Liego raz jeszcze. Cz. I

Literatura dodatkowa: [Ada69, Tra, DK00]

Grupa Liego: Jest to grupa (G, μ) taka, że G jest wyposażone w strukturę rozmaitości różniczkowej o tej własności, że działanie grupowe $\mu : G \times G \to G$ oraz odwzorowanie $\epsilon : g \mapsto g^{-1} : G \to G$ są gładkie.

PRZYKŁAD: Niech V będzie przestrzenią wektorową, a $G := GL(V) \subset \mathrm{End}(V)$ będzie grupą odwracalnych endomorfizmów przestrzeni V.

Odwzorowania dołączone: Oznaczmy $\mathfrak{g} := T_e G$ (tutaj $e \in G$ jest elementem neutralnym), a przez $A_g : G \to G$ automorfizm wewnętrzny $A_g(x) := gxg^{-1}, x, g \in G$. Odwzorowanie A_g jest odwzorowaniem gładkim o własności $A_g(e) = e$. W szczególności, mamy odwzorowanie styczne $(A_g)_*|_e : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, które standardowo oznacza się przez Ad_g (lub $\mathrm{Ad}g$, od angielskiego „adjoint”).

LEMAT *Odwzorowanie* $\mathrm{Ad} : g \mapsto \mathrm{Ad}_g : G \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ *jest reprezentacją G w przestrzeni wektorowej $\mathfrak{g}$ (którą nazywamy reprezentacją* dołączoną *).*

Dowód Łatwo widzieć, że A_g jest odwzorowaniem odwracalnym (z odwrotnym $A_{g^{-1}}$), więc $\mathrm{Ad}_g \in GL(\mathfrak{g})$. Ponadto, $A_{g_1 g_2} = A_{g_1} A_{g_2}$, skąd $\mathrm{Ad}_{g_1 g_2} = \mathrm{Ad}_{g_1} \mathrm{Ad}_{g_2}$, czyli Ad jest homomorfizmem. □

Zauważmy, że odwzorowanie Ad jest odwzorowaniem gładkim, w szczególności mamy odwzorowanie styczne $\mathrm{Ad}_*|_e : T_e G \to T_I GL(\mathfrak{g})$. Wiemy, że $T_I GL(\mathfrak{g}) = \mathrm{End}(\mathfrak{g})$, otrzymaliśmy więc odwzorowanie $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g}), X \mapsto \mathrm{ad}_X$ (standardowe oznaczenie ad_X lub $\mathrm{ad}X$).

Połóżmy

$$[X, Y] := \mathrm{ad}_X Y, X, Y \in \mathfrak{g}.$$

PRZYKŁAD: Dla $G = GL(V)$ mamy $\mathfrak{g} = T_e G = \mathrm{End}(V)$, a odwzorowanie $A_x : y \mapsto xyx^{-1} : G \to G$ jest ograniczeniem odwzorowania liniowego $Y \mapsto xYx^{-1} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Stąd jego pochodna Ad_x z nim się pokrywa, czyli $\mathrm{Ad}_x Y = xYx^{-1}, Y \in \mathfrak{g}$. Obliczymy różniczkę odwzorowania $\mathrm{Ad} : x \mapsto \mathrm{Ad}_x : G \to \mathfrak{g}$ w $e = I$ na wektorze $X \in \mathfrak{g}$ w następujący sposób. Niech $t \mapsto x(t)$ będzie gładką krzywą w G o własności $x(0) = e, x'(0) = X$. Wtedy

$$\mathrm{ad}_X Y = \frac{d}{dt}|_{t=0}(x(t)Y(x(t))^{-1}) = x'(0)Y(x(0))^{-1} + x(0)Y((x(t))^{-1})'|_{t=0} = XY - YX$$

(tutaj skorzystaliśmy z równości $x(t)(x(t))^{-1} = I$ różniczkując którą w zerze, mamy $((x(t))^{-1})'|_{t=0} = -x'(0)$). Innymi słowy, nawias $[X, Y]$ dla endomorfizmów przestrzeni liniowej jest ich komutatorem.

Własności nawiasu $[,]$

TWIERDZENIE 1. *Niech G bedzie dowolną grupą Liego, $\mathfrak{g} = T_eG$. Wtedy para $(\mathfrak{g}, [,])$ jest algebrą Liego, czyli nawias $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$*

(a) jest dwuliniowy;

(b) jest antysymetryczny ($[X,Y] = -[Y,X]\ \forall X,Y \in \mathfrak{g}$);

(c) spełnia tożsamość Jakobiego ($[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0\ \forall X,Y,Z \in \mathfrak{g}$).

2. Niech G, G' będą grupami Liego, a $\Phi : G \to G'$ będzie gładkim homomorfizmem. Oznaczmy $\phi := \Phi_*|_e : T_eG \to T_{e'}G'$. Wtedy $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ jest homomorfizmem algebr Liego, czyli

$$\phi[X,Y]_{\mathfrak{g}} = [\phi(X), \phi(Y)]_{\mathfrak{g}'}\ \forall X,Y \in \mathfrak{g}.$$

Dowód Zacznijmy dowód od drugiego punktu. Warunek homomorfizmu dla Φ implikuje

$$\Phi(A_x y) = \Phi(xyx^{-1}) = \Phi(x)\Phi(y)\Phi(x)^{-1} = A_{\Phi(x)}\Phi(y).$$

Przy ustalonym x pierwszy i ostatni człon tego ciągu jest gładkim odwzorowaniem z G w G'. Obliczmy różniczkę tego odwzorowania w punkcie $y = e$ na wektorze $Y \in \mathfrak{g}$, otrzymamy

$$\Phi_*|_{A_x e} \circ \mathrm{Ad}_x Y = \phi(\mathrm{Ad}_x Y) = \mathrm{Ad}_{\Phi(x)} \circ \Phi_*|_e Y = \mathrm{Ad}_{\Phi(x)}\phi(Y).$$

Pozwalając x się zmieniać, otrzymujemy gładkie odwzorowanie z G w $\mathfrak{g}'$. Obliczając jego różniczkę w e na wektorze $X \in \mathfrak{g}$, otrzymujemy

$$\phi(\mathrm{ad}_X Y) = \mathrm{ad}_{\phi(X)}\phi(Y).$$

Przystąpmy do dowodu p. 1. Dwuliniowość $[,]$ jest oczywista. Teraz zastosujmy udowodniony fakt do homomorfizmu grup Liego $\mathrm{Ad} : G \to G' = GL(\mathfrak{g})$ oraz skorzystajmy z tego, że nawias $[,]_{\mathfrak{g}'}$ pokrywa się z komutatorem. Otrzymamy równość

$$\mathrm{ad}_{[X,Y]} = \mathrm{ad}_X \mathrm{ad}_Y - \mathrm{ad}_Y \mathrm{ad}_X.$$

która jest równoważna tożsamości Jakobiego w założeniu, że zachodzi antysymetryczność nawiasu (*Ćwiczenie*: udowodnij tę równoważność). Czyli zostało nam udowodnić antysymetryczność.

Rozważmy odwzorowanie $\Psi : G \times G \to G, (x,y) \mapsto xyx^{-1}y^{-1}$. Udowodnimy najpierw, że (e,e) jest punktem krytycznym tego odwzorowania, czyli różniczka $\Psi_*|_{(e,e)}$ znika. Istotnie, mamy $\Psi(x,e) = e, \Psi(e,y) = e$ dla dowolnych $x,y \in G$. Stąd różniczka cząstkowa $\Psi^1_*|_{(e,e)}$ względem pierwszego argumentu znika i różniczka cząstkowa $\Psi^2_*|_{(e,e)}$ względem drugiego argumentu też. Gładkość Ψ gwarantuje znikanie $\Psi_*|_{(e,e)}$.

Teraz obliczmy $\Psi^2_*|_{(x,e)}Y$, gdzie $Y \in \mathfrak{g}$, oraz $\Psi^1_*|_{(e,y)}X$, gdzie $X \in \mathfrak{g}$. Według lematu, który udowodnimy poniżej, $\Psi^2_*|_{(x,e)}Y = \mathrm{Ad}_x Y - Y$ oraz $\Psi^1_*|_{(e,y)}X = X - \mathrm{Ad}_y X$. Obliczając różniczkę pierwszego wyrażenia po x na X, a drugiego po y na Y, otrzymujemy $\mathrm{ad}_X Y$ oraz $-\mathrm{ad}_Y X$ odpowiednio. Skądinąd wiemy, że te wyrażenia są równe, ponieważ gładkość odwzorowania gwarantuje symetryczność formy drugich pochodnych w punkcie krytycznym. $\square$

Lemat *1.* $\Psi^2_*|_{(x,e)} Y = \mathrm{Ad}_x Y - Y$;

2. $\Psi^1_*|_{(e,y)} X = X - \mathrm{Ad}_y X$.

Dowód Najpierw zauważmy, że, jeśli $\phi(t), \psi(t)$ są krzywe w G o własnościach $\phi(0) = e = \psi(0), \phi'(0) = \Phi, \psi'(0) = \Psi$, to $\frac{d}{dt}|_{t=0}(\phi(t) \cdot \psi(t)) = \Phi + \Psi$. Istotnie, działanie grupowe $\mu : G \times G \to G$ spełnia tożsamości $\mu(x, e) = x, \mu(e, y) = y$, które implikują równości $\frac{\partial \mu^k(e,e)}{\partial x^j} = \delta^k_j, \frac{\partial \mu^k(e,e)}{\partial y^j} = \delta^k_j$. Tutaj wybraliśmy dowolny lokalny układ współrzędnych na G w otoczeniu e i reprezentujemy odwzorowanie μ przez funkcje $\mu^1, \mu^2, \ldots$ Teraz obliczamy: $\frac{d}{dt}|_{t=0}(\phi(t) \cdot \psi(t)) = \frac{\partial \mu^k(e,e)}{\partial x^j}\Phi^j + \frac{\partial \mu^k(e,e)}{\partial y^j}\Psi^j = \Phi^k + \Psi^k$.

Wybierzmy gładką krzywą $y(t)$ w G o własnościach $y(0) = e, y'(0) = Y$. Wiemy już, że $\frac{d}{dt}|_{t=0}(y(t))^{-1}) = -Y$. Ponadto, z definicji $\frac{d}{dt}|_{t=0}(xy(t)x^{-1}) = \mathrm{Ad}_x Y$.

Oznaczmy $\phi(t) := xy(t)x^{-1}, \psi(t) := (y(t))^{-1}$. Wtedy $\phi(0) = e = \psi(0), \phi'(0) = \mathrm{Ad}_x Y, \psi'(0) = -Y$. Ostatecznie, $\Psi^2_*|_{(x,e)} Y = \frac{d}{dt}|_{t=0}(xy(t)x^{-1}(y(t))^{-1}) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(\phi(t) \cdot \psi(t)) = \mathrm{Ad}_x Y - Y$. Drugi wzór dowodzi się analogicznie. $\square$

2 O algebrach Liego grup Liego raz jeszcze. Cz. II

Literatura dodatkowa: [Ada69, Tra, DK00]

Przypomnienie o polach lewoniezmienniczych: Dla $g \in G$ określmy odwzorowanie lewej translacji $L_g : G \to G$ wzorem $L_g x := gx$ (i, przy okazji, prawej translacji $R_g : G \to G$ wzorem $R_g x := xg$). Mając element $V \in T_e G = \mathfrak{g}$ możemy zbudować pole wektorowe $V^l \in \mathrm{Vect}(G)$ kładząc $V^l = (L_g)_*|_e V$. Tak okreslone pole wektorowe jest *lewoniezmiennicze*, czyli $(L_g)_* V^l = V^l$. I odwrotnie, każde pole lewoniezmiennicze $v \in \mathrm{Vect}(G)$ jest postaci $v = V^l$, gdzie $V := w(e)$.

Potok pola lewoniezmienniczego

LEMAT *Niech $\Phi^t := \Phi^t_w : G \to G$ będzie lokalnym potokiem pola lewoniezmienniczego w na G. (Inaczej mówiąc $\frac{d}{dt}\Phi^t(x_0) = w(x_0)$ dla dowolnego $x_0 \in G$, czyli krzywa $t \mapsto \Phi^t(x_0)$ zadaje lokalne rozwiązanie równania różniczkowego $\dot{x} = w(x)$ z warunkiem początkowym $x_0 \in G$.) Wtedy ma miejsce wzór*

$$\Phi^t = R_{\Phi^t(e)}.$$

Dowód: Niech $x(t) := R_{\Phi^t(e)} x_0$. Wtedy $x(t) = x_0 \Phi^t(e) = L_{x_0}\Phi^t(e)$ oraz $x(0) = x_0$. Ponadto

$$\frac{d}{dt}x(t) = (L_{x_0})_*|_{\Phi^t(e)} w(\Phi^t(e)) = w(x_0\Phi(e)) = w(x(t)).$$

Stąd $x(t) = \Phi^t(x_0)$. $\square$

Jednoparametrowe podgrupy w G: Są to homomorfizmy grup $(\mathbb{R}, +) \to G$.

TWIERDZENIE *Dla każdego $X \in \mathfrak{g}$ istnieje jedyna jednoparametrowa podgrupa $h_X : (\mathbb{R}, +) \to G$ gładka oraz spełniająca warunek $\frac{d}{dt}|_{t=0} h_X(t) = X$. Jest ona równa $t \mapsto \Phi^t_{X^l}(e)$ (w szczególności krzywa całkowa pola X^l przechodząca przez e jest globalna w czasie).*

Dowód: Niech $\Phi^t := \Phi^t_{X^l}$. Znana z teorii równań różniczkowych jest własność $\Phi^{t+s} = \Phi^t \circ \Phi^s$ (o ile prawa i lewa części są określone). Z lematu mamy $\Phi^t \circ \Phi^s = R_{\Phi^t(e)} \circ R_{\Phi^s(e)} = R_{\Phi^s(e)\cdot\Phi^t(e)}$, ale mamy też $\Phi^{t+s} = R_{\Phi^{t+s}(e)}$. Stąd $\Phi^s(e) \cdot \Phi^t(e) = \Phi^{t+s}(e)$.

Równość ta pokazuje, że, jeśli krzywa $t \mapsto \Phi^t(e)$ jest określona dla $t \in]-\epsilon, \epsilon[$, to jest ona określona również dla $t \in]-2\epsilon, 2\epsilon[$. Iterując, dostajemy globalność po t.
Jednoznaczność: Niech $h : (\mathbb{R}, +) \to G$ będzie podgrupą jednoparametrową o warunku $\frac{d}{dt}|_{t=0} h(t) = X$. Różniczkując równość

$$h(t+s) = h(t)h(s) = L_{h(t)}h(s)$$

po s w zerze mamy $\dot{h}(t) = (L_{h(t)})_*|_e X = X^l(h(t))$. Stąd $h(t)$ jest krzywą całkową pola X^l przechodzącą przez e, czyli jest określona jednoznacznie. $\square$

Odwzorowanie wykładnicze $\exp : \mathfrak{g} \to G$**:** Dla $X \in \mathfrak{g}$ definiujemy $\exp(X)$ jako $h_X(1)$, gdzie $h_X(t)$ jest (jedyną) grupą jednoparametrową o warunku $h_X(0) = X$.

TWIERDZENIE *exp jest dyfeomorfizmem pewnego otoczenia $U \ni 0$ w $\mathfrak{g}$ na pewne otoczenie $V \ni e$ w G.*

Dowód: Gładkość *exp* wynika z teorii równań różniczkowych. Rozważmy $h : s \mapsto h_X(st)$. Wtedy $h(s+s') = h_X((s+s')t) = h_X(st+s't) = h_X(st)\cdot h_X(s't) = h(s)\cdot h(s')$, czyli h jest podgrupą jendoparametrową. Ponadto $\dot{h}(0) = tX$, skąd $h(s) = h_{tX}(s)$. Dla $s = 1$ to daje

$$h_X(t) = \exp(tX).$$

Różniczkując tę równość w zerze, otrzymujemy $X = \exp_*|_0 X$, czyli $\exp_*|_0 = \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}$. Stosując twierdzenie o odwzorowaniu odwrotnym, dostajemy wynik. □

Przykład: Niech $G = U(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} = 1\}$. Wtedy jedynym (z dokładnością do proporcjonalności lewoniezmienniczym polem na G jest $v = w|_G$, gdzie w jest polem wektorowym na płaszczyźnie zadanym przez $w := -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$. Istotnie, obrót o kat ϕ jest zadany macierzą $L_\phi := \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$. Pochodna z tego odwzorowania liniowego z nim się pokrywa i mamy

$$L_\phi w((\cos\phi_0, \sin\phi_0)) = L_\phi \begin{bmatrix} -\sin\phi_0 \\ \cos\phi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin(\phi+\phi_0) \\ \cos(\phi+\phi_0) \end{bmatrix} = w((\cos(\phi+\phi_0), \sin(\phi+\phi_0)).$$

Odwzorowanie $t \mapsto L_t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (innymi słowy $t \mapsto e^{it}$) jest jednoparametrową grupą h_X, odpowiadającą wektorowi $X = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = w((1,0)) \in \mathfrak{g} = T_eG$. Odwzorowanie wykładnicze jest więc równe $tX \mapsto h_{tX}(1) = h_X(t) = e^{it}$.

Przykład: Niech $G = GL(n,\mathbb{R})$. Pola lewoniezmiennicze $V^l, V \in \mathfrak{g} = \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$, mają postać $(XV, X), X \in G$ (zob. ostatni wykład z Teorii grup I). Równanie różniczkowe $\dot{X} = XV$ ma rozwiązanie $t \mapsto X\mathrm{Exp}(tV)$, gdzie Exp jest funkcją wykładniczą od operatorów liniowych na $\mathbb{R}^n$. Rozwiązanie to zadaje jednoparametrową podgrupę odpowiadającą elementowi $V \in \mathfrak{g}$. Odwzorowanie wykładnicze $\mathfrak{g} \to G$ ma postać $V \mapsto \mathrm{Exp}(V)$.

Inne własności odwzorowania exp

Twierdzenie 1. *Jeśli G, H są grupami Liego o algebrach Liego $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$, a $\Phi : G \to H$ jest gładkim homomorfizmem, to*

$$\Phi(\exp X) = \exp((\Phi_*)|_e X)\ \forall X \in \mathfrak{g}.$$

2. $\mathrm{Ad}_{\exp X} = \mathrm{Exp}(\mathrm{ad}_X)\ \forall X \in \mathfrak{g}$.

3. $x \exp X x^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}_x X)\ \forall X \in \mathfrak{g}, x \in G$.

Dowód: Ad. 1. Niech $X \in \mathfrak{g}$ i $h_X : \mathbb{R} \to G$ będzie odpowiednią grupą jednoparametrową. Wtedy $\exp(X) = h_X(1)$, ale odwzorowanie $h : t \mapsto \Phi(h_X(t)) : \mathbb{R} \to H$ (jako złożenie homomorfizmów gładkich) jest jednoparametrową podgrupą w H. Z drugiej strony $\frac{d}{dt}|_{t=0} h(t) = (\Phi_*)|_e(\frac{d}{dt}|_{t=0} h_X) = (\Phi_*)|_e X$, czyli $h = h_{(\Phi_*)|_e X}$.

Ad. 2. Zastosujmy p. 1 do gładkiego homomorfizmu grup Liego $\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g})$.

Ad. 3. Zastosujmy p. 1 do gładkiego homomorfizmu grup Liego $A_x : G \to G$. □

3 Związek pomiędzy podgrupami i podalgebrami Liego

Literatura dodatkowa: [Ada69, DK00, Hel00, Pos86]

Podrozmaitości włożone i zanurzone: Niech M będzie gładką rozmaitością. Podrozmaitością (*włożoną*) kowymiaru k w M nazywamy podzbiór $N \subset M$ taki, że dla każdego $x \in N$ istnieje otoczenie otwarte $U \ni x$ w M oraz odwzorowanie gładkie $f : U \to \mathbb{R}^k$ o własnościach:

1. rząd odwzorowania f jest równy k w dowolnym punkcie $y \in U \cap N$;
2. $z \in U \cap N \iff \exists! c \in \mathbb{R}^k : f(z) = c$.

Podrozmaitością *zanurzoną* kowymiaru k, z kolei, nazywamy podzbiór $N \subset M$ taki, że istnieje rozmaitość gładka N' wymiaru $\dim M - k$ oraz odwzorowanie gładkie $\Phi : N' \to M$ o własnościach:

1. Φ jest injektywne;
2. Φ jest immersja, czyli $(\Phi_*)|_x : T_x N' \to T_{\Phi(x)} M$ jest injektywne dla dowolnego $x \in N'$;
3. $\Phi(N') = N$.

Ćwiczenie: Udowodnić, że każda podrozmaitość jest podrozmaitością zanurzoną.

Przykład („owinięcie torusa”): $M := \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, pole wektorowe $v_{a,b} := a\frac{\partial}{\partial x^1} + b\frac{\partial}{\partial x^2}$, gdzie $a, b \in]0, \infty[$ są ustalone, może być zrzutowane na pole wektorowe $\tilde{v}_{a,b}$ na $\mathbb{T}^2$. Trajektorie ostatniego $t \to P(x^1 + at, x^2 + bt)$ są rzutami prostych $t \to (x^1 + at, x^2 + bt)$.

Przypadek wymierny: b/a wymierne, $b = m\lambda, a = n\lambda$ dla pewnego $\lambda \in \mathbb{R}$. Wtedy dla $t := 1/\lambda$ mamy $(x^1 + at, x^2 + bt) = (x^1 + m, x^2 + n)$ i $P(x^1 + at, x^2 + bt) = P(x^1, x^2)$ (trajektorie są domknięte, czyli okresowe, i są podrozmaitościami).

Przypadek niewymierny: b/a niewymierne (każda trajektoria jest podrozmaitością zanurzoną gęstą w M, w szczególności nie jest podrozmaitością).

Podgrupa Liego H w grupie Liego G: Jest to podgrupa $H \subset M$ będąca podrozmaitością. *Ćwiczenie:* udowodnić, że podgrupa Liego ma naturalną strukturę grupy Liego oraz, ze naturalne włożenie $\iota : H \to G$ jest gładkim homomorfizmem.

Wirtualna podgrupa Liego H w grupie Liego G: Jest to podgrupa $H \subset M$ będąca obrazem gładkiego monomorfizmu grup $H' \to G$ dla pewnej grupy Liego H'. W szczególności: 1) H jest podrozmaitością zanurzona (*Ćwiczenie:* udowodnij); 2) oraz każda podgrupa Liego jest wirtualną podgrupą Liego; 3) H ma strukturę grupy Liego „przychodzącą” z H'.

Przykład: Trajektoria pola $\tilde{v}_{a,b}$ przechodząca przez 0 jest wirtualną podgrupą Liego i jest (prawdziwą) podgrupą Liego tylko w przypadku wymiernym.

Uwaga: Można pokazać, że wirtualna podgrupa Liego jest podgrupą Liego wtedy i tylko wtedy, gdy H jest domknięta w G (jako podprzestrzeń topologiczna), zob. [Ada69].

Związek pomiędzy podgrupami i podalgebrami Liego:

Twierdzenie *1. Niech H będzie wirtualną podgrupą Liego w G. Wtedy podprzestrzeń $\mathfrak{h} := T_e H \subset T_e G = \mathfrak{g}$ jest podalgebrą Liego w algebrze Liego $(\mathfrak{g}, [,])$ (innymi słowy $[x, y] \in \mathfrak{h}$ dla wszystkich $x, y \in \mathfrak{h}$). Ponadto $(\mathfrak{h}, [,]|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}) = \mathrm{Lie}(H)$ ($\mathrm{Lie}(F)$ oznacza algebrę Liego grupy Liego F).*

2. *Odwrotnie, niech* $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ *będzie podalgebrą Liego w algebrze Liego* $(\mathfrak{g}, [,])$ *grupy Liego* G. *Wtedy istnieje jedyna spójna wirtualna podgrupa Liego* $H \subset G$ *o własności* $\mathfrak{h} = T_e H$. *Ponadto* $(\mathfrak{h}, [,]|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}) = \mathrm{Lie}(H)$.

Dowód: Ad. 1. Rozważmy monomorfizm $\Phi : H' \to G, \Phi(H') = H$. Mamy odwzorowanie styczne $\phi := (\Phi_*)|_e : \mathfrak{h}' \to \mathfrak{g}$ (tutaj $\mathfrak{h}' := \mathrm{Lie}(H'), \mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G)$) będący homomorfizmem algebr Liego, zob. Wykład 1 (dokładniej, ϕ jest monomorfizmem, czyli homomorfizmem z trywialnym jądrem). *Ćwiczenie:* pokaż, że obraz homomorfizmu $\mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ algebr Liego jest podalgebrą Liego w $\mathfrak{g}_2$. Oczywistym jest, że $\mathrm{im}\,\phi = \mathfrak{h}$. To, że $(\mathfrak{h}, [,]|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}) = \mathrm{Lie}(H)$ wynika z definicji struktury grupy Liego na H: ona „przychodzi" z H', skąd struktura algebry Liego na $\mathfrak{h}$ „przychodzi" z $\mathfrak{h}'$.

Dygresja o twierdzeniu Frobeniusa: *Dystrybucją* wymiaru r na rozmaitości gładkiej M nazywamy gładką podwiązkę $D \subset TM$ wiązki stycznej TM z włóknem wymiaru r. Innymi słowy jest to rodzina podprzestrzeni $D_x \subset T_x M$ gładko zależąca od punktu $x \in M$. Lokalnie taka dystrybucja jest generowana przez r liniowo niezależnych (w każdym punkcie) pól wektorowych.

Mówimy, że D jest *całkowalna*, jeśli przez każdy punkt $x \in M$ przechodzi podrozmaitość zanurzona N_x o własności $T_x N_x = D_x$ (takie N_x nazywamy *podrozmaitościami całkowymi* dla D). Gładkość D gwarantuje jednoznaczność takiej podrozmaitości.

Mówimy, że $\mathcal{D}$ jest *inwolutywna*, jeśli jeśli dla dowolnych dwóch pól wektorowych $X, Y \in \mathrm{Vect}(M)$ stycznych do D $\mathcal{D}$ (czyli takich, że $X(x), Y(x) \in D_x$ dla wszystkich $x \in M$) ich komutator $[X, Y]$ też jest styczny do $\mathcal{D}$ (równoważnie, lokalnie istnieją $v_1, \dots, v_r, v_i \in \mathrm{Vect}(M)$, i funkcje f_{ij}^k takie, że $\mathrm{Span}\{v_1, \dots, v_r\} = \mathcal{D}$ and $[v_i, v_j] = f_{ij}^k v_k$; *Ćwiczenie:* udowodnij równoważność).

Przykład: Dystrybucja D generowana przez pole wektorowe $\tilde{v}_{a,b}$ na $\mathbb{T}^2$ (jak i każda dystrybucja 1-wymiarowa na dowolnej rozmaitości) jest inwolutywna i całkowalna. Podrozmaitości całkowe są trajektoriami pola $\tilde{v}_{a,b}$.

Twierdzenie *(Frobeniusa) Dystrybucja D jest całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest inwolutywna.*

Przykład: Dystrybucja 2-wymiarowa generowana przez pola wektorowe $X = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}, Y = \frac{\partial}{\partial y}$ na $\mathbb{R}^3$ nie jest inwolutywna, więc nie jest całkowalna.

Ad. 2. (szkic dowodu) Niech $X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{h} = T_e H$ będzie bazą przestrzeni liniowej $\mathfrak{h}$. Rozważmy pola lewoniezmiennicze $X_1^l, \dots, X_r^l$ oraz dystrybucję gładką $D \subset TG$ rozpiętą przez nie. Ponieważ $[X_i^l, X_j^l] = [X_i, X_j]^l$ (zob. ostatni wykład z Teorii grup I), dystrybucja D jest inwolutywna, więc i całkowalna. Niech H będzie podrozmaitością całkową dla D przechodzącą przez e.

Udowodnimy, że H jest podgrupą. Istotnie, D jest generowane przez lewoniezmiennicze pola wektorowe, jest więc lewoniezmiennicze: $(L_g)_* D = D, g \in G$. Stąd wnioskujemy, że i zbiór jego podrozmaitości całkowych jest lewoniezmienniczy. Dokładniej mówiąc, jeśli H_x jest podrozmaitością całkową przechodzącą przez $x \in G$, to $L_g H_x = H_{gx}$. W szczególności dla $g \in H = H_e$ mamy $L_g H = L_g H_e = H_{ge} = H_g = H$. Innymi słowy $gh \in H$ dla dowolnych $g, h \in H$. Jeśli $h \in H$, to $L_{h^{-1}} H = L_{h^{-1}} H_h = H_{h^{-1}h} = H_e = H$. W szczególności, $h^{-1}e \in H$. Wraz z oczywistym warunkiem $e \in H$ to daje żądaną własność H.

Do zakończenia dowodu należy wprowadzić na H strukturę gładką taką, że działania grupowe oraz włożenie $\iota : H \hookrightarrow G$ są gładkie w niej (wtedy H' pokrywa się z H z tą strukturą, a monomorfizm $H' \to G$ pokrywa się z ι). Ta część dowodu okazuje się nietrywialna z powodu subtelności topologicznych (zob. [Pos86]) i ją opuścimy. $\square$

4 Grupa automorfizmów algebry Liego

Literatura dodatkowa: [Hel00]

Kilka uwag wstępnych:

Uwaga 1: W pytaniu o jednoznaczności wirtualnej podgrupy Liego H odpowiadającej podalgebrze Liego $\mathfrak{h}$ istotny jest wymóg spójnosci H. Na przykład, grupa Liego $GL(n,\mathbb{R})$ ma dwie składowe spójne $GL_\pm(n,\mathbb{R}) := \{X \in GL(n,R) \mid \pm \det X > 0\}$. Składowa spójna jedynki, $GL_+(n,\mathbb{R})$ ma tę samą algebrę Liego $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) = \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})$, co i $GL(n,\mathbb{R})$.

Uwaga 2: Spójna wirtualna podgrupa Liego $H \subset G$ odpowiadająca podalgebrze Liego $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ może nie pokrywać się z $\exp(\mathfrak{h})$ (zob. przykład poniżej) ale jest generowana przez $\exp(\mathfrak{h})$. Ostatnie oznacza, że elementy z H sa postaci $\exp Y_1 \cdots \exp Y_n$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ i pewnych $Y_1, \ldots, Y_n \in \mathfrak{h}$. Wynika to z faktu, że każdy punkt y z podrozmaitości całkowej N_x dystrybucji $D = \langle X_1^l, \ldots, X_r^l \rangle$ jest postaci $\Phi^{t_1}_{X^l_{i_1}} \circ \cdots \circ \Phi^{t_n}_{X^l_{i_n}} x$, gdzie $\Phi^{t_j}_{X^l_{i_j}}$ jest potokiem pola $X^l_{i_j}$.

Uwaga 3: Jeśli $H \subset G$ jest wirtualną podgrupą Liego w grupie Liego G to odpowiednią podalgebrę Liego $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ można szukać używając wzoru $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \exp_{\mathfrak{g}}(X) \in H\}$, gdzie $\exp_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \to G$ odwzorowanie wykładnicze odpowiadające większej grupie. *Ćwiczenie:* Udowodnij to.

Przykład: Niech $G := GL(n,\mathbb{R}), H := SL(n,\mathbb{R}) = \{x \in G \mid \det x = 1\}$. Wtedy $\mathfrak{h} = \{X \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R}) \mid \det \mathrm{Exp}(X) = 1\}$. Znana jest tożsamość $\det \mathrm{Exp}(X) = e^{\mathrm{Tr}(X)}$ (zob. [Tra, I.7.1]), która implikuje $\mathfrak{h} = \{X \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}(X) = 0\} =: \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$.

Przykład: Niech $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. Wtedy $\det(X - \lambda I) = -(a^2 - \lambda^2) - bc$ i λ jest wartością własna wtedy i tylko wtedy gdy $\lambda^2 = a^2 + bc = -\det(X) =: D$. Postać Jordana macierzy X i $\mathrm{Exp}(X)$ jest równa odpowiednio

1. $\begin{bmatrix} \sqrt{D} & 0 \\ 0 & -\sqrt{D} \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} e^{\sqrt{D}} & 0 \\ 0 & e^{-\sqrt{D}} \end{bmatrix}$, jeśli $D > 0$;
2. $\begin{bmatrix} i\sqrt{-D} & 0 \\ 0 & -i\sqrt{-D} \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} e^{i\sqrt{-D}} & 0 \\ 0 & e^{-i\sqrt{-D}} \end{bmatrix}$, jeśli $D < 0$;
3. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, jeśli $D = 0$.

(*Ćwiczenie:* Znajdź jawną postać $\mathrm{Exp}(X)$ w każdym przypadku.) Wynika z tego, że macierz $x = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$ nie leży w $\mathrm{Exp}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}))$ dla $\alpha < 0, \alpha \neq -1$ (x pokrywa się ze swoją postacią Jordana).

Uwaga 4: (zob. [Hel00, II,§5]) Jeśli G jest grupą Liego, a $H \subset G$ jej *normalną* podgrupą Liego (prawdziwą), to grupa ilorazowa G/H posiada naturalną strukturę grupy Liego, względem której rzut kanoniczny $\pi : G \to G/H$ jest gładkim homomorfizmem grup.

Uwaga 5: (zob. [Hel00, II,§5]) Jeśli $\Phi : G \to F$ jest homomorfizmem gładkim grup Liego, to

1. jądro $H := \ker \Phi = \Phi^{-1}(e)$ jest normalną (prawdziwą) podgrupą Liego w G;
2. istnieje jedyny gładki homomorfizm grup Liego $\Phi' : G/H \to F$ zamykający diagram

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, "\Phi"] & \\ G/H \arrow[r, "\Phi'"] & F \end{tikzcd} \quad .$$

3. obraz $\Phi(G)$ jest wirtualną podgrupą Liego w F, przy czym odwzorowanie Φ' zadaje izomorfizm struktur grup Liego na G/H i $\Phi(G)$.

Automorfizmy algebry Liego $\mathfrak{g}$: Są to endomorfizmy odwracalne $N \in GL(\mathfrak{g})$ przestrzeni liniowej $\mathfrak{g}$ będące jednocześnie homomorfizmami algebry Liego $(\mathfrak{g}, [,])$. (*Ćwiczenie:* Sprawdź, że odwrotność takiego homomorfizmu automatycznie jest homomorfizmem.) Automorfizmy algebry Liego tworzą podgrupę $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ w grupie Liego $GL(\mathfrak{g})$.

Ćwiczenie: Udowodnij, że $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ jest podgrupą Liego w $GL(\mathfrak{g})$. *Wskazówka:* Wykaż, że $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ jest liniową grupą algebraiczną (zob. Wykład 12 z Teorii grup I).

Algebra Liego $\partial(\mathfrak{g})$ grupy $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$**:** Wiemy (zob. Uwagę 3), że $\partial(\mathfrak{g})$ składa się z takich $D \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) := \mathrm{End}(\mathfrak{g})$, że $\mathrm{Exp}(tD) \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$, czyli

$$\mathrm{Exp}(tD)[X,Y] = [\mathrm{Exp}(tD)X, \mathrm{Exp}(tD)Y], X, Y \in \mathfrak{g}. \tag{1}$$

Różniczkując tę równość po t w zerze otrzymujemy

$$D[X,Y] = [DX,Y] + [X,DY], X,Y \in \mathfrak{g} \tag{2}$$

(istotnie, $\mathrm{Exp}(tD)[X,Y] = (I + tD + \cdots)[X,Y] = [X,Y] + tD[X,Y] + \cdots, [\mathrm{Exp}(tD)X, \mathrm{Exp}(tD)Y] = [(I+tD+\cdots)X, (I+tD+\cdots)Y] = [X,Y] + t([DX,Y]+[X,DY]) + \cdots$, tutaj $\cdots$ oznacza człony rzędu wyższego niż 1 po t). Powyższy wzór oznacza, że D jest *różniczkowaniem* algebry Liego $(\mathfrak{g}, [,])$ (zob. ostatni wykład z Teorii grup I).

LEMAT *Algebra Liego $\partial(\mathfrak{g})$ grupy Liego* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ *składa się ze wszystkich różniczkowań algebry Liego* $(\mathfrak{g}, [,])$.

Dowód: Niech D będzie różniczkowaniem. Stosując indukcję otrzymujemy ze wzoru (2) wzór na „wyższe różniczkowania": $D^k[X,Y] = \sum_{i+j=k} \frac{k!}{i!j!}[D^iX, D^jY]$, gdzie $D^0 := \mathrm{Id}$. Stąd dla D otrzymujemy wzór (1), czyli $\mathrm{Exp}(tD) \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. $\square$

Grupa dołączona i różniczkowania wewnętrzne: Tożsamość Jakobiego implikuje dwa ważne fakty: 1) dla dowolnego $X \in \mathfrak{g}$ operator $\mathrm{ad}_X \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ jest różniczkowaniem (zwanym *wewnętrznym*); 2) odwzorowanie $X \mapsto \mathrm{ad}_X : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ jest homomorfizmem algebr Liego. (*Ćwiczenie:* Udowodnij to po raz kolejny). Obraz tego homomorfizmu oznaczamy $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$. Jest on podalgebrą w $\partial(\mathfrak{g})$ (jako obraz homomorfizmu).

Teraz opiszemy grupę Liego odpowiadającą tej algebrze Liego.

LEMAT *Niech G będzie grupą Liego. Wtedy dla każdego $x \in G$ endomorfizm odwracalny* $\mathrm{Ad}_x \in GL(\mathfrak{g})$ *jest automorfizmem algebry Liego* $\mathfrak{g}$

Dowód: Przypomnijmy, że odwzorowanie $\mathrm{Ad}_x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ było zdefiniowane jako pochodna w jedynce $(A_x)_*|_e$ automorfizmu wewnętrznego $A_x, A_x y := xyx^{-1}$, grupy G. Pochodna w jedynce homomorfizmu grup Liego jest homomorfizmem odpowiednich algebr Liego (zob. Wykład 1), stąd Ad_x jest homomorfizmem algebry Liego $\mathfrak{g}$. Jest to homomorfizm odwracalny ($(\mathrm{Ad}_x)^{-1} = A_{x^{-1}}$), czyli jest automorfizmem $\mathfrak{g}$. $\square$

Z lematu tego wynika, że obraz gładkiego homomorfizmu grup Liego $\mathrm{Ad} : G \to GL(\mathfrak{g}), x \mapsto \mathrm{Ad}_x$, leży w podgrupie Liego $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Wirtualną podgrupę Liego $\mathrm{Ad}(G) \subset \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ oznaczamy przez $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ i nazywamy grupą *dołączoną* lub grupą *automorfizmów wewnętrznych*. Ponieważ odwzorowanie $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ było definiowane jako pochodna Ad w jedynce, $\mathrm{Lie}(\mathrm{Int}(\mathfrak{g})) = \mathrm{im}\,\mathrm{ad} = \mathrm{ad}(\mathfrak{g})$.

LEMAT *Niech G będzie spójną grupa Liego, a $Z = \{x \in G \mid x \cdot y = y \cdot x \ \forall y \in G\} \subset G$ będzie jej* centrum. *Wtedy jądro homomorfizmu grup* $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ *pokrywa się z Z. W szczególności,* $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ *jest izomorficzna jako grupa Liego z G/Z.*

Dowód. Jeśli $x \in Z$, to $A_x = \mathrm{Id}_G$ i jego pochodna Ad_x też jest identycznością, czyli $x \in \ker \mathrm{Ad}$.

Odwrotnie, niech $x \in \ker \mathrm{Ad}$. Wzór $x \exp X x^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}_x X)$ (zob. Wykład II) implikuje, że jeśli $x \in Z$, to x komutuje ze wszystkimi elementami postaci $\exp X, X \in \mathfrak{g}$. Ponieważ takie elementy generują G (zob. Uwagę 2), $x \in Z$. $\square$

5 Zwarte i półproste algebry Liego. Cz. I

Literatura dodatkowa: [Hel00]

Suma prosta (zewnętrzna) algebr Liego $(\mathfrak{g}_1, [,]_1)$ **i** $(\mathfrak{g}_2, [,]_2)$**:** Jest to algebra Liego $(\mathfrak{g}, [,])$, gdzie $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2, [(X_1, X_2), (Y_1, Y_2)] := ([X_1, Y_1], [X_2, Y_2])$. *Ćwiczenie:* sprawdź, że to jest algebra Liego.

Ideał $\mathfrak{a}$ w algebrze Liego $\mathfrak{g}$: Jest to podprzestrzeń wektorowa w $\mathfrak{g}$ o własności $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{a}$, gdzie $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] := \{[A, X] \mid A \in \mathfrak{a}, X \in \mathfrak{g}\}$ (zauważmy, że każdy ideał jest podalgebrą). W szczególności, 1) *centrum* $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) := \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0 \ \forall Y \in \mathfrak{g}\}$ algebry Liego $\mathfrak{g}$ jest ideałem w $\mathfrak{g}$; 2) *komutant* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] := \{[X, Y] \mid X, Y \in \mathfrak{g}\}$ algebry Liego $\mathfrak{g}$ jest ideałem w $\mathfrak{g}$; 3) jeśli $(\mathfrak{g}, [,])$ jest sumą prostą, to $(\mathfrak{g}_1, 0), (0, \mathfrak{g}_2)$ są ideałami w $\mathfrak{g}$. *Ćwiczenie:* sprawdź to.

Wewnętrzna suma prosta: Niech $\mathfrak{g}$ ma ideały $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ takie, że $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ (wewnętrzna suma prosta przestrzeni wektorowych, czyli $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_2 = \{0\}$). Wtedy $\mathfrak{g}$ jest izomorficzna jako algebra Liego z zewnętrzną sumą prostą $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$. *Ćwiczenie:* sprawdź to.

Przykład: Niech $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Wtedy $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \mathbb{R}I$, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ oraz $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. *Ćwiczenie:* sprawdź to.

Przykład: Niech $\mathfrak{g} := \{ \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$. Wtedy $\mathfrak{g}$ ze zwykłym komutatorem macierzy jest algebrą Liego (zwaną *algebrą Heisenberga*). Komutator przekłada się na następujące działanie: $[(a, b, c), (a', b', c')] = (0, ac' - a'c, 0)$. W szczególności, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{(0, b, 0) \mid b \in \mathbb{R}\}$, ale nie istnieje takiego ideału (nawet podalgebry) $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$, że $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{a}$ (tutaj rozumiemy ostanie wyrażenie jako sumę prostą algebr Liego). *Ćwiczenie:* sprawdź to.

Przykład: Niech $\mathfrak{g} := \mathfrak{b}(n, \mathbb{R}) := \{[X_{ij}] \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid X_{ij} = 0 \ \forall i > j\}$ (algebra Liego macierzy *górnotrójkątnych*). Wtedy $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{n}(n, \mathbb{R}) := \{[X_{ij}] \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid X_{ij} = 0 \ \forall i \geq j\}$ (algebra Liego macierzy *ściśle górnotrójkątnych*, dla $n = 3$ pokrywa się z algebrą Heisenberga). *Ćwiczenie:* sprawdź to.

Związek pomiedzy ideałami a podgrupami normalnymi:

Lemat *Niech G będzie grupą Liego, $H \subset G$ jej wirtualna podgrupą Liego i niech $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G), \mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(H)$. Wtedy H jest podgrupą normalna, jeśli i tylko jeśli $\mathfrak{h}$ jest ideałem w $\mathfrak{g}$.*

Dowód: Niech H normalna, czyli odwzorowanie $A_x : G \to G, A_x y = xyx^{-1}, x \in G$, zachowuje H: $A_x(H) \subset H$. Wtedy jego pochodna $\mathrm{Ad}_x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ zachowuje $T_e H = \mathfrak{h}$, czyli $\mathrm{Ad}_x(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$. Innymi słowy, obraz homomorfizmu grup Liego $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ leży w podgrupie $\mathrm{End}^{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g})$ endomorfizmów $\mathfrak{g}$ zachowujących $\mathfrak{h}$. Wybierzmy bazę $e_1, \ldots, e_n$ w $\mathfrak{g}$ taką, że $e_1, \ldots, e_k$ jest baza $\mathfrak{h}$. Endomorfizmy z $\mathrm{End}^{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g})$ w tej bazie mają macierze postaci blokowej $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$.

Niech $c(t)$ będzie krzywą gładką w G o warunku $c(0) = e, \dot{c}(0) = X, X \in \mathfrak{g}$. Odwzorowanie Ad przeprowadza tę krzywą na krzywą postaci $\begin{bmatrix} A(t) & B(t) \\ 0 & C(t) \end{bmatrix}$, a jego pochodna ad przeprowadza wektor X na $\begin{bmatrix} \dot{A}(0) & \dot{B}(0) \\ 0 & \dot{C}(0) \end{bmatrix}$. Stąd widzimy, że ad_X też zachowuje $\mathfrak{h}$, a ponieważ $X \in g$ jest dowolne, $\mathfrak{h}$ jest ideałem.

Odwrotnie, niech $\mathfrak{h}$ będzie ideałem. Wtedy $\mathrm{ad}_X Y \in \mathfrak{h}$ dla dowolnego $X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{h}$. Stąd też $\mathrm{Exp}(\mathrm{ad}_X)Y \in \mathfrak{h}$, a wzór $\mathrm{Exp}(\mathrm{ad}_X) = \mathrm{Ad}_{\exp X}$ (zob. Wykład 2) pokazuje, że i $\mathrm{Ad}_{\exp X} Y \in \mathfrak{h}$. Ponieważ $\exp(\mathfrak{g})$ generuje G, mamy $\mathrm{Ad}_x Y \in \mathfrak{h}$ dla dowolnego $x \in G$ (istotnie, jeśli $x = \exp X_1 \cdots \exp X_s$, to $\mathrm{Ad}_x = \mathrm{Ad}_{\exp X_1} \circ \cdots \circ \mathrm{Ad}_{\exp X_s}$ wskutek tego, że Ad jest reprezentacją). Teraz zostaje skorzystać ze wzoru $\exp(\mathrm{Ad}_x Y) = x \exp Y x^{-1}$ (zob. Wykład 2) oraz z faktu, że $\exp(\mathfrak{h})$ generuje H, żeby wywnioskować, że $xHx^{-1} \subset H$. □

Forma Killinga na algebrze Liego $\mathfrak{g}$: Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego nad ciałem $\mathbb{K}(= \mathbb{R}, \mathbb{C})$. Niech $(|)$ będzie dwuliniową forma symetryczna na $\mathfrak{g}$. Nazywamy $(|)$ *niezmienniczą*, jeśli ma własność:

$$([X, Y]|Z) + (Y|[X, Z]) = 0 \;\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$$

(innymi słowy operator ad_X jest w niej skośnie symetryczny dla dowolnego $X \in \mathfrak{g}$).

PRZYKŁAD: Forma $(X|Y) := \mathrm{Tr}(XY)$ na $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}), \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ jest niezmiennicza: $([X, Y]|Z) = \mathrm{Tr}([X, Y]Z) = \mathrm{Tr}((XY - YX)Z) = \mathrm{Tr}(XYZ - YXZ) = \mathrm{Tr}(YZX - YXZ)$ oraz $(Y|[X, Z]) = \mathrm{Tr}(Y[x, Z]) = \mathrm{Tr}(YXZ - YZX) = -([X, Y]|Z)$.

PRZYKŁAD: *Forma Killinga* $B_{\mathfrak{g}}(X, Y) := \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_X \mathrm{ad}_Y)$ jest niezmiennicza dla dowolnej algebry Liego $\mathfrak{g}$: $B_{\mathfrak{h}}([X, Y], Z) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{[X,Y]}\mathrm{ad}_Z) = \mathrm{Tr}([\mathrm{ad}_X, \mathrm{ad}_Y]\mathrm{ad}_Z) = -\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_Y[\mathrm{ad}_X, \mathrm{ad}_Y]) = -\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_Y \mathrm{ad}_{[X,Z]}) = -B_{\mathfrak{g}}(Y, [X, Z])$.

LEMAT *Niech $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ będzie ideałem, a $(|)$ niezmienniczą formą symetryczną na $\mathfrak{g}$. Wtedy dopełnienie ortogonalne $\mathfrak{a}^\perp : \{X \in \mathfrak{g} \mid (X|Y) = 0 \;\forall Y \in \mathfrak{a}\}$ też jest ideałem.*

Dowód: Niech $X \in \mathfrak{a}, Y \in \mathfrak{g}, Z \in \mathfrak{a}^\perp$. Wtedy $[X, Y] \in \mathfrak{a}$, skąd $0 = ([X, Y]|Z) = -(Y|[X, Z])$, co oznacza, że $[X, Y] \in \mathfrak{a}^\perp$. □

Półprosta algebra Liego: Jest to algebra Liego z *niezdegenerowaną* formą Killinga $B_{\mathfrak{g}}$.

Uwaga: Półprosta algebra Liego ma trywialne centrum. Istotnie, centrum $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ jest jądrem odwzorowania $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$. W szczególności, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ leży w jądrze formy Killinga, które jest trywialne.

LEMAT *Niech $\mathfrak{g}$ będzie półprostą algebrą Liego, a $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ jej ideałem. Wtedy*

1. *Ograniczenie $B_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{a}\times\mathfrak{a}}$ formy Killinga algebry $\mathfrak{g}$ do $\mathfrak{a}$ pokrywa się z $B_{\mathfrak{a}}$.*
2. *$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$.*
3. *$\mathfrak{a}$ (i $\mathfrak{a}^\perp$) jest algebrą półprostą.*

Dowód: Ad. 1. Znowu wybierzmy bazę $e_1, \ldots, e_n$ w $\mathfrak{g}$ taką, że $e_1, \ldots, e_k$ jest baza $\mathfrak{a}$. Endomorfizmy $\mathrm{ad}^{\mathfrak{g}}_X, X \in \mathfrak{a}$, w tej bazie mają macierze postaci blokowej $\begin{bmatrix} A(X) & B(X) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, natomiast macierze $\mathrm{ad}^{\mathfrak{a}}_X$ w bazie $e_1, \ldots, e_k$ pokrywają się z $A(X)$. Widać, że $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}^{\mathfrak{g}}_X \mathrm{ad}^{\mathfrak{g}}_Y) = \mathrm{Tr}(A(X)A(Y)) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}^{\mathfrak{a}}_X \mathrm{ad}^{\mathfrak{a}}_Y)$.

Ad. 2. Niech $Z \in \mathfrak{g}, X, Y \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$. Wtedy $B_{\mathfrak{g}}(Z, [X, Y]) = -B_{\mathfrak{g}}([X, Z], Y) = 0$ (bo $[X, Z] \in \alpha, Y \in \alpha^\perp$), skąd $[X, Y]$ jest ortogonalne do całej $\mathfrak{g}$, czyli musi być zero wskutek tego, że $B_{\mathfrak{g}}$ jest niezdegenerowana. Innymi słowy, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$ jest *abelową* algebrą Liego (czyli z zerowym nawiasem $[,]$).

Wybierzmy teraz bazę $e_1, \ldots, e_n$ w $\mathfrak{g}$ inaczej, tak, żeby $e_1, \ldots, e_m$ było bazą w $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$. Niech $Z \in \mathfrak{g}, T \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$. Wtedy $\mathrm{ad}_T \mathrm{ad}_Z$ odwzorowuje $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$ w zero (bo $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$ jest ideałem jak i każde przecięcie dwóch ideałów, czyli $[Z, \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp] \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$, a ponadto jest abelowy, czyli $[T, [Z, \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp]] = 0$). Natomiast przestrzeń naciągnięta na wektory $e_{m+1}, \ldots, e_n$ jest odwzorowywana przez endomorfizm $\mathrm{ad}_T \mathrm{ad}_Z$ w $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$ (bo ad_T wszystko odwzorowuje w $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$).

W wybranej bazie macierz endomorfizmu $\mathrm{ad}_T \mathrm{ad}_Z$ ma postać $\begin{bmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, skąd $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_T \mathrm{ad}_Z) = 0$. wnioskujemy, że $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$ jest ortogonalne do całej przestrzeni, czyli $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp = \{0\}$. Niezdegenerowaność $B_\mathfrak{g}$ implikuje równość $\dim \mathfrak{a}^\perp = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{a}$, która daje $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} + \mathfrak{a}^\perp$.

Ad. 3. Gdyby $B_\mathfrak{a}$ było zdegenerowane, istniałby nietrywialny wektor $v \in \ker B_\mathfrak{g}|_{\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$. $\square$

Prosta algebra Liego: Jest to półprosta algebra Liego nie zawierająca nietrywialnych ideałów (ideały trywialne to $\{0\}$ i cała algebra).

PRZYKŁAD: Wszystkie algebry z przykładów powyżej nie są proste.

TWIERDZENIE *Półprosta algebra Liego $\mathfrak{g}$ jest sumą prostą $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$, gdzie każde $\mathfrak{g}_i$ jest ideałem bedącym algebrą prostą. Ponadto każdy ideał algebry $\mathfrak{g}$ jest sumą prostą pewnych $\mathfrak{g}_i$.*

Dowód: Jeśli $\mathfrak{g}$ ma nietrywialny ideał $\mathfrak{a}$, rozszczepimy $\mathfrak{g}$ na $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\perp$. Oba ideały są półproste. Stosując powyższą procedurę do $\mathfrak{a}$ i $\mathfrak{a}^\perp$ indukcyjnie dojdziemy do ideałów prostych i otrzymamy rozkład $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$. $\square$

WNIOSEK *Dla półprostej algebry Liego g mamy $[g, g] = \mathfrak{g}$.*

Dowód: Istotnie, $[g, g] = [g_1, g_1] \oplus \cdots \oplus [\mathfrak{g}_n, \mathfrak{g}_n]$ (bo $[g_i, g_j] = \{0\}$ dla $i \neq j$). Ponadto $[\mathfrak{g}_i, g_i]$ jest ideałem w $\mathfrak{g}_i$, czyli musi być równy $\mathfrak{g}_i$ (nie może być zero, bo wtedy $\mathfrak{g}_i$ byłaby abelową). $\square$

Półproste i proste grupy Liego: Są to grupy Liego, których algebry Liego są odpowiednio półproste i proste.

6 Zwarte i półproste algebry Liego. Cz. II

Literatura dodatkowa: [Hel00, Pos86]

Niezmienniczość formy Killinga ze względu na automorfizmy:

LEMAT *Niech $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ będzie automorfizmem algebry Liego $\mathfrak{g}$. Wtedy $B_\mathfrak{g}(\phi(X), \phi(Y)) = B_\mathfrak{g}(X, Y)$ dla dowolnych $X, Y \in \mathfrak{g}$ (czyli ϕ jest izometrią).*

Dowód: Warunek automorfizmu $\phi[X, Y] = [\phi(X), \phi(Y)]$ można przepisać w postaci $\phi \circ \mathrm{ad}_X Y = (\mathrm{ad}_{\phi(X)} \circ \phi)Y$. Stąd $\mathrm{ad}_{\phi(X)} = \phi \circ \mathrm{ad}_X \circ \phi^{-1}$ oraz $B_\mathfrak{g}(\phi(X), \phi(Y)) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{\phi(X)}\mathrm{ad}_{\phi(Y)}) = \mathrm{Tr}(\phi \circ \mathrm{ad}_X \circ \phi^{-1}\phi \circ \mathrm{ad}_Y X \circ \phi^{-1}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_X \mathrm{ad}_Y) = B_\mathfrak{g}(X, Y)$. $\square$

Przykłady półprostych algebr Liego: Niech E_{ij} będzie macierzą $n \times n$ o jedynym niezerowym wyrazie równym 1 stojącym w i-tym wierszu i j-tej kolumnie. Wtedy ma miejsce wzór $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$.

Dla macierzy diagonalnej $X = \sum_i x_{ii}E_{ii}$ oznaczmy $\psi_s(X) := x_{ii}$. Wtedy ψ_s jest funkcjonałem liniowym na przestrzeni D macierzy diagonalnych $n \times n$ oraz

$$[E_{ii}, E_{kl}] = (\psi_k(E_{ii}) - \psi_l(E_{ii}))E_{kl}, k \neq l$$

Według liniowości

$$[X, E_{kl}] = (\psi_k(X)) - \psi_l(X)))E_{kl}$$

dla dowolnej $X \in D$. Mamy też $[X, Y] = 0$ dla dowolnych $X, Y \in D$.

Rozważmy algebrę $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$ oraz jej podprzestrzeń $\mathfrak{h} := D \cap \mathfrak{g}$. Niech $e_{ij} := E_{ii} - E_{jj}$. Wtedy operatory $\mathrm{ad}_X, X \in \mathfrak{h}$, są diagonalne w bazie $e_{12}, e_{13}, \ldots, e_{1n}, E_{ij}, i \neq j$. W szczególności, $B_\mathfrak{g}(X, X) = Tr(\mathrm{ad}_X^2) = \sum_{kl}(\psi_k(X) - \psi_l(X))^2 = \sum_{kl}(\psi_k(X)^2 + \psi_l(X)^2 - 2\psi_k(x)\psi_l(X)) = 2n\,\mathrm{Tr}(X^2) - 2(\mathrm{Tr}(X))^2 = 2n\,\mathrm{Tr}(X^2)$.

Teraz niech $X \in \mathfrak{g}$ będzie dowolną macierzą diagonalizowalną, czyli istnieje takie $Y \in GL(n, \mathbb{K})$, że $Z := YXY^{-1} \in D$ (zauważmy, że odwzorowanie $X \mapsto YXY^{-1}$ jest automorfizmem $\mathfrak{g}$ oraz , że $Z \in \mathfrak{h}$). Wtedy $B_\mathfrak{g}(X, X) = B_\mathfrak{g}(Z, Z) = 2n\,\mathrm{Tr}(Z^2) = 2n\,\mathrm{Tr}(X^2)$.

Teraz zauważmy, że każda macierz $S \in \mathfrak{g}$ może być przybliżona macierzami diagonalizowalnymi. Istotnie, dla $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ to wystarczy wykazać dla klatki Jordana

$$J := \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}.$$

Niech $\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)$ będą funkcjami ciągłymi takimi, że $\lambda_i(0) = \lambda, i = 1, \ldots, n$, oraz $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t)$ gdy $i \neq j$ oraz $t \neq 0$. Wtedy macierz

$$J(t) := \begin{bmatrix} \lambda_1(t) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2(t) & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n(t) \end{bmatrix}$$

jest diagonalizowalna (bo ma spektrum proste) oraz ma własność $J(0) = J$. Dla $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ działa podobny argument zastosowany do tzw. uogólnionych klatek Jordana.

Ostatecznie możemy skorzystać z ciągłości $B_\mathfrak{g}$, żeby wywnioskować, że $B_\mathfrak{g}(X,X) = 2n\operatorname{Tr}(X^2)$ dla wszystkich $X \in \mathfrak{g}$ oraz zastosować wzór polaryzacji do udowodnienia wzoru

$$B_\mathfrak{g}(X,Y) = 2n\operatorname{Tr}(XY)\ \forall X,Y \in \mathfrak{g}.$$

Forma $\operatorname{Tr}(XY)$ jest niezdegenerowana na $\mathfrak{g}$ (*Ćwiczenie*), co pokazuje, że $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{K})$ jest algebrą półprostą.

Można też pokazać, że dla algebry Liego $\mathfrak{g} := \mathfrak{so}(n,\mathbb{K}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{K}) \mid X + X^T = 0\}$ macierzy antysymetrycznych spełniony jest wzór

$$B_\mathfrak{g}(X,Y) = (n-2)\operatorname{Tr}(XY)\ \forall X,Y \in \mathfrak{g},$$

który pokazuje, że $\mathfrak{so}(n,\mathbb{K})$ też jest półprosta. Istotnie, dla $X = \sum_{ij} x_{ij}E_{ij} \in \mathfrak{g}$ mamy $x_{ij} = -x_{ji}$ oraz $\operatorname{Tr}(X^2) = -\sum_{ij} x_{ij}^2 = -2\sum_{i<j} x_{ij}^2$. Jest to forma niezdegenerowana, a dla $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ zauważamy też, że jest < 0.

Różniczkowania algebry półprostej

LEMAT *Jeśli $\mathfrak{g}$ jest półprostą, to $\partial(\mathfrak{g}) = \operatorname{ad}(\mathfrak{g})$, czyli każde różniczkowanie jest wewnętrzne.*

Dowód: Algebra $\operatorname{ad}(\mathfrak{g})$ jest izomorficzna z $\mathfrak{g}$. Istotnie, jądro homomorfizmu $\operatorname{ad} : \mathfrak{g} \to \operatorname{End}(\mathfrak{g})$ pokrywa się z centrum $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Skoro $\mathfrak{g}$ jest półprosta, ma $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$, stąd $\mathfrak{g}$ jest izomorficzna ze swoim obrazem względem ad.

Algebra izomorficzna z półprostą sama jest półprosta (dowód tego jest bardzo podobny do dowodu Lematu na początku tego wykładu).

Okazuje się, że $\operatorname{ad}(\mathfrak{g})$ jest ideałem w $\partial(\mathfrak{g})$: $[d, \operatorname{ad}_X] = \operatorname{ad}_{dX}, d \in \partial(\mathfrak{g}), X \in \mathfrak{g}$ (*Ćwiczenie*: udowodnij ten wzór). Rozważmy ideał $\mathfrak{a} := (\operatorname{ad}(\mathfrak{g}))^\perp$ (dopełnienie ortogonalne względem $B_{\partial(\mathfrak{g})}$) w $\partial(\mathfrak{g})$. Udowodnimy teraz, że $\mathfrak{a} = \{0\}$.

Niech $d \in \mathfrak{a}$. Wtedy $[d, \operatorname{ad}_X] \in \mathfrak{a} \cap \operatorname{ad}(\mathfrak{g})$. Ostatnia przestrzeń jest zerowa, ponieważ $\mathfrak{a} \cap \operatorname{ad}(\mathfrak{g}) = \ker B_{\partial(\mathfrak{g})}|_{\operatorname{ad}(\mathfrak{g})\times\operatorname{ad}(\mathfrak{g})} = B_{\operatorname{ad}(\mathfrak{g})} = \{0\}$. Mamy $0 = [d, \operatorname{ad}X] = \operatorname{ad}_{dX}$ dla dowolnego $X \in \mathfrak{g}$. Stąd $dX \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, czyli $dX = 0$ i $d = 0$. $\square$

WNIOSEK *Dla algebry półprostej $\mathfrak{g}$ nad $\mathbb{R}$ grupa dołączona $\operatorname{Int}(\mathfrak{g})$ pokrywa się ze składową jedynki grupy automorfizmów $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$. W szczególności $\operatorname{Int}(\mathfrak{g})$ jest prawdziwą podgrupą Liego w $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$.*

Zwarta algebra Liego: Jest to algebra Liego $\mathfrak{g}$ nad $\mathbb{R}$ taka, że jej grupa dołączona $\operatorname{Int}(\mathfrak{g})$ jest zwarta.

TWIERDZENIE
1. *Niech $\mathfrak{g}$ będzie półprostą algebrą Liego nad $\mathbb{R}$. Wtedy $\mathfrak{g}$ jest zwarta jeśli i tylko jeśli gdy $B_\mathfrak{g} < 0$.*
2. *Każda zwarta algebra Liego $\mathfrak{g}$ jest sumą prostą $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) + [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, gdzie ideał $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ jest półprosty i zwarty.*

Dowód: Niech $\mathfrak{g}$ będzie półprosta z $B_\mathfrak{g} < 0$, a $O(\mathfrak{g}) \subset GL(\mathfrak{g})$ oznacza grupę endomorfizmów zachowujących $B_\mathfrak{g}$. Wtedy $O(\mathfrak{g})$ jest zwarta (jest to domknięty podzbiór sfery $\mathrm{Tr}(XX^T) = \mathrm{Tr}(I)$), mamy też zwartość $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \subset O(\mathfrak{g})$ (jako domkniętego podzbioru zbioru zwartego) oraz zwartość $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$.

Odwrotnie, niech $\mathfrak{g}$ będzie zwarta. Wtedy $G := \mathrm{Int}(\mathfrak{g}) \subset GL(\mathfrak{g})$ jest zwartą podgrupą Liego. Istnieje wtedy niezmienniczy względem G dodatnio określony iloczyn skalarny $(|)$ na $\mathfrak{g}$ (dowód istnienia - poprzez uśrednienie, podobnie do przypadku grup skończonych, zob. Wykład 6 z Teorii grup I). W bazie ortonormalnej macierze endomorfizmów z $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ są ortogonalne, a macierze elementów z $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ są antysymetryczne. Mamy

$$B_\mathfrak{g}(X, X) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_X \mathrm{ad}_X) = \sum_{ij} x_{ij} x_{ji} = -\sum_{ij} x_{ij}^2 \leq 0,$$

tutaj x_{ij} jest macierzą endomorfizmu ad_X w wybranej bazie ortonormalnej. Równość osiąga się wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{ad}_X = 0$, czyli $X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Rozważmy teraz dopełnienie ortogonalne $\mathfrak{g}'$ do $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ względem $(|)$. Niezmienniczość tego iloczynu ze względu na $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ pokazuje, że $\mathfrak{g}'$ tez jest ideałem, skąd $B_{\mathfrak{g}'} = B_\mathfrak{g}|_{\mathfrak{g}' \times \mathfrak{g}'}$. Przestrzeń $\mathfrak{g}'$ jest dopełniająca do $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \ker B_\mathfrak{g}$, dlatego $B_{\mathfrak{g}'}$ jest niezdegenerowana i < 0. Stąd $\mathfrak{g}'$ jest półprosta i zwarta. Ponadto $[g', g'] = g'$, skąd $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'] = \mathfrak{g}'$. $\square$

WNIOSEK *Algebra Liego $\mathfrak{g}$ jest zwarta wtedy i tylko wtedy gdy jest algebrą Liego pewnej zwartej grupy Liego.*

Dowód: Jeśli $\mathfrak{g}$ jest zwarta, to $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathbb{T} \times \mathrm{Int}(\mathfrak{g}))$, gdzie $\mathbb{T}$ jest torusem wymiaru $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Jeśli $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ dla zwartej G, to $\mathrm{Int}(\mathfrak{g}) \cong G_0/(Z \cap G_0)$ (tutaj G_0 składowa jedynki grupy G). $\square$

PRZYKŁADY: Grupy Liego $O(n, \mathbb{R}) = \{x \in GL(n, \mathbb{R}) \mid xx^T = I\}, SO(n, \mathbb{R}) = \{x \in O(n, \mathbb{R}) \mid \det x = 1\}, U(n) = \{x \in GL(n, \mathbb{C}) \mid x\bar{x}^T = I\}, SU(n) = \{x \in U(n) \mid \det x = 1\}$ i odpowiednie algebry Liego $\mathfrak{o}(n, \mathbb{R}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid X + X^T = 0\} = \mathfrak{so}(n, \mathbb{R}), \mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid X + \overline{X}^T = 0\}, \mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathfrak{u}(n) \mid \mathrm{Tr}\, X = 0\}$ są zwarte (*Ćwiczenie:* sprawdź to).

7 Rozwiązalne i nilpotentne algebry Liego. Twierdzenie Leviego.

Literatura dodatkowa: [Woj86, Pos86]

Rozwiązalne i nilpotentne algebry Liego: Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego. Połóżmy $\mathfrak{g}^0 := \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^n := [\mathfrak{g}^{n-1}, \mathfrak{g}^{n-1}]$ oraz $\mathfrak{g}_0 := \mathfrak{g}, \mathfrak{g}_n = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{n-1}], n = 1, 2, \ldots$ Otrzymujemy ciągi ideałów (*Ćwiczenie:* udowodnij, że $\mathfrak{g}^n, \mathfrak{g}_n$ są ideałami w $\mathfrak{g}$)

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \supset \mathfrak{g}^1 \supset \cdots$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \ldots,$$

o własności $\mathfrak{g}_n \supset \mathfrak{g}^n$. Mówimy, że $\mathfrak{g}$ jest *rozwiązalna* (*nilpotentna*) jeśli istnieje takie $N \in \mathbb{N}$, że $\mathfrak{g}^N = \{0\}$ ($\mathfrak{g}_N = \{0\}$). Powyższa własność pokazuje, że każda algebra nilpotentna jest rozwiązalna.

Przykład: Każda algebra abelowa $\mathfrak{g}$ (np. 1-wymiarowa) jest nilpotentna. Istotnie, $\mathfrak{g}_1 = \{0\}$.

Przykład: Niech $M(k) := \{[X_{ij}] \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \mid X_{ij} = 0 \ \forall i \geq j + k\}, k = 0, 1, \ldots$ będzie zbiorem macierzy o wyrazach zerowych poniżej „k-tej górnej diagonali" (0-diagonala to diagonala główna). Wtedy $M(k)M(l) \subset M(k+l)$ (dokładniej $M(k)M(l) = M(k+l)$). Stąd mamy, że algebra Liego macierzy ściśle górnotrójkątnych $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}(n, \mathbb{K}) = M(1)$ jest nilpotentna. Istotnie, $\mathfrak{g}_1 = [M(1), M(1)] \subset M(2), \mathfrak{g}_2 = [M(1), \mathfrak{g}_1] \subset M(3), \ldots, \mathfrak{g}_k = [M(1), \mathfrak{g}_{k-1}] \subset M(k+1)$, skąd $\mathfrak{g}_n = \{0\}$.

Przykład: Algebra Liego $\mathfrak{g} = \mathfrak{b}(n, \mathbb{K}) = M(0)$ macierzy górnotrójkątnych jest rozwiązalna. Istotnie, $\mathfrak{g}^1 = [M(0), M(0)] \subset M(1)$ (tutaj wykorzystujemy fakt, że dla $X, Y \in M(0)$ wyrazy diagonalne w iloczynach XY, YX są takie same). Dalej, $\mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}^1, \mathfrak{g}^1] \subset [M(1), M(1)] \subset M(2), \mathfrak{g}^3 = [\mathfrak{g}^2, \mathfrak{g}^2] \subset [M(2), M(2)] \subset M(4), \mathfrak{g}^4 \subset M(8), \ldots, \mathfrak{g}^k \subset M(2^{k-1})$.

Zauważmy, że $\mathfrak{g}$ nie jest nilpotentna: $\mathfrak{g}_1 = [M(0), M(0)] = M(1), \mathfrak{g}_2 = [M(0), M(1)] = M(1), \ldots, \mathfrak{g}_k = [M(0), M(k-1)] = M(1)$.

Związki z formą Killinga: Jeśli $\mathfrak{g}$ nilpotentna, z definicji wynika, że $\mathrm{ad}_{X_1} \circ \cdots \circ \mathrm{ad}_{X_N} = 0$ dla wystarczająco dużych N i dowolnych $X_1, \ldots, X_N \in \mathfrak{g}$. W szczególności ad_X jest operatorem nilpotentnym dla dowolnego $X \in \mathfrak{g}$ (przypomnijmy, że operator L jest nilpotentny, jeśli $L^N = 0$ dla pewnego $N \in \mathbb{N}$). Stad mamy też, że $B_{\mathfrak{g}} \equiv 0$, ponieważ $B_{\mathfrak{g}}(X, X) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_X^2)$, a ślad operatora nilpotentnego jest równy zero (*dlaczego?*)(wykorzystujemy tu również tożsamość polaryzacyjną $B_{\mathfrak{g}}(X, Y) = (B_{\mathfrak{g}}(X+Y, X+Y) - B_{\mathfrak{g}}(X, X) - B_{\mathfrak{g}}(Y, Y))/2$).

Przykład: Niech $\mathfrak{g} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{e_1, e_2, e_3\}, [e_1, e_2] = e_2, [e_1, e_3] = ie_3, [e_2, e_3] = 0$. Wtedy $\mathrm{ad}_{e_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}, \mathrm{ad}_{e_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathrm{ad}_{e_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix}$ i $B_{\mathfrak{g}} \equiv 0$. *Ćwiczenie:* Sprawdzić bezpośrednio, że 1) $\mathfrak{g}$ jest algebrą Liego; 2) $\mathfrak{g}$ jest rozwiązalna; 3) $\mathfrak{g}$ nie jest nilpotentna.

Ostatni punkt wynika też z następującego twierdzenia (bo ad_{e_1} nie jest nilpotentny), które przyjmujemy bez dowodu.

Twierdzenie *(Engel) Algebra Liego $\mathfrak{g}$ jest nilpotentna, jeśli ad_X jest operatorem nilpotentnym dla dowolnego $X \in \mathfrak{g}$.*

Punkt 2) powyższego ćwiczenia jest wnioskiem z następnego twierdzenia, które też przyjmujemy bez dowodu.

TWIERDZENIE *(Kryterium Cartana rozwiązalności) Algebra Liego $\mathfrak{g}$ jest rozwiązalna wtedy i tylko wtedy, gdy* $\ker B_{\mathfrak{g}} \supset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *(inaczej* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^{\perp} = \mathfrak{g}$*).*

Iloczyn półprosty algebr Liego $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$: Niech $f : \mathfrak{g}_2 \to \partial(\mathfrak{g}_1)$ będzie homomorfizmem algebr Liego. Na sumie prostej $\mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_1$ przestrzeni liniowych określamy nawias $[(X_2, X_1), (Y_2, Y_1)] := ([X_2, Y_2]_2, [X_1, Y_1]_1 + f_{X_2}Y_1 - f_{Y_2}X_1)$, gdzie $f_X := f(X), X \in \mathfrak{g}_2$. *Ćwiczenie:* sprawdź, że jest to nawias Liego na $\mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_1$. Oznaczamy $\mathfrak{g}_2 \ltimes \mathfrak{g}_1 := (\mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_1, [,])$.

Rozszerzenia algebr Liego: Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego a $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ jej ideałem. *Ćwiczenie:* 1) udowodnij, że działanie $[X + \mathfrak{a}, Y + \mathfrak{a}] := [X, Y] + \mathfrak{a}$ na przestrzeni ilorazowej $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ jest określone poprawnie i zadaje strukturę algebry Liego; 2) pokaż, że jądro $\ker \phi$ dowolnego homomorfizmu algebr Liego $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ jest ideałem w $\mathfrak{g}$, a jego obraz $\operatorname{im} \phi$ podalgebrą w $\mathfrak{h}$; 3) udowodnij, że algebry Liego $\operatorname{im} \phi$ i $\mathfrak{g}/\ker \phi$ są izomorficzne.

Ciągiem dokładnym algebr Liego nazywamy ciąg

$$\cdots \to \mathfrak{g}_{k-1} \stackrel{\phi_{k-1}}{\to} \mathfrak{g}_k \stackrel{\phi_k}{\to} \mathfrak{g}_{k+1} \to \cdots \tag{3}$$

algebr Liego i homomorfizmów pomiędzy nimi o własności $\ker \phi_k = \operatorname{im} \phi_{k-1}$ dla dowolnego k. *Rozszerzeniem* algebry Liego $\mathfrak{g}_2$ za pomocą algebry Liego $\mathfrak{g}_1$ nazywamy *krótki ciąg dokładny*

$$0 \to \mathfrak{g}_1 \stackrel{\iota}{\to} \mathfrak{g} \stackrel{\pi}{\to} \mathfrak{g}_2 \to 0.$$

Powyższe ćwiczenie pokazuje, że $\mathfrak{g}_1$ jest ideałem w $\mathfrak{g}$ oraz że $\mathfrak{g}_2 \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1$. Rozszerzenie (3) nazywamy *trywialnym* lub *rozszczepialnym*, jeśli istnieje cięcie $s : \mathfrak{g}_2 \to \mathfrak{g}$ homomorfizmu π (czyli odwzorowanie liniowe o własności $\pi \circ s = \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}_2}$) będące homomorfizmem algebr Liego.

LEMAT *Jeśli rozszerzenie (3) jest rozszczepialne, algebra Liego $\mathfrak{g}$ jest izomorficzna z iloczynem półprostym algebr Liego $\mathfrak{g}_2$ i $\mathfrak{g}_1$.*

Dowód: Za pośrednictwem włożenia ι oraz cięcia s utożsamiamy $\mathfrak{g}$ (jako przestrzeń liniową) z $\mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{g}_1$.

Homomorfizm $f : \mathfrak{g}_2 \to \mathrm{End}(\mathfrak{g}_1)$ budujemy w sposób następujący. Dla $X \in \mathfrak{g}_2$ mamy $\mathrm{ad}_X \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_1$ (wskutek tego, że $\mathfrak{g}_1$ jest ideałem). Otrzymaliśmy więc odwzorowanie $f : X \mapsto \mathrm{ad}_X|_{\mathfrak{g}_1} : \mathfrak{g}_2 \to \partial(\mathfrak{g}_1)$ będące homomorfizmem algebr Liego (ponieważ $X \to \mathrm{ad}_X : \mathfrak{g} \to \partial(\mathfrak{g})$ jest homomorfizmem).

Skoro $\iota(\mathfrak{g}_1) = (0, \mathfrak{g}_1)$ oraz $s(\mathfrak{g}_2) = (\mathfrak{g}_2, 0)$ są podalgebrami, mamy $[(0, X_1), (0, Y_1)] = (0, [X_1, Y_1]_1)$, $[(X_2, 0), (Y_2, 0)] = ([X_2, Y_2]_2, 0)$. Stąd $[(X_2, X_1), (Y_2, Y_1)] = [(X_2, 0) + (0, X_1), (Y_2, 0) + (0, Y_1)] = ([X_2, Y_2]_2, 0) + (0, [X_1, Y_1]_1) + [(X_2, 0), (0, Y_1)] + [(0, X_1), (Y_2, 0)] = ([X_2, Y_2]_2, 0) + (0, [X_1, Y_1]_1) + (0, f_{X_2}Y_1) - (0, f_{Y_2}X_1) = ([X_2, Y_2]_2, [X_1, Y_1]_1 + f_{X_2}Y_1 - f_{Y_2}X_1)$. □

PRZYKŁAD: Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Heisenberga, $\mathfrak{g} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}, [(x, y, z), (x_1, y_1, z_1)] = (0, xz_1 - zx_1, 0)$. Wtedy $\mathfrak{g}_1 := \{(0, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\}$ jest ideałem w $\mathfrak{g}$. *Ćwiczenie:* udowodnij, że $\mathfrak{g}_2 := \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_1$ jest 2-wymiarową algebrą abelową i że rozszerzenie $0 \to \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_2 \to 0$ nie jest rozszczepialne.

Radykał algebry Liego $\mathfrak{g}$:

LEMAT *Jeśli $\mathfrak{g}$ jest rozwiązalną algebrą Liego, to dowolna jej podalgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ jest rozwiązalna oraz algebra ilorazowa $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ względem dowolnego ideału $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ jest rozwiązalna. Odwrotnie, jeśli $\mathfrak{g}$ algebra Liego, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ ideał rozwiązalny oraz algebra ilorazowa $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ jest rozwiązalna, to $\mathfrak{g}$ też jest rozwiązalna.*

Dowód: Mamy $\mathfrak{h}^n \subset \mathfrak{g}^n$, stąd pierwsza teza. Niech $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ będzie rzutem naturalnym. Wtedy $(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})^n = \pi(\mathfrak{g}^n)$, stąd druga teza.

Teraz niech $(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})^N = \{0\}$ dla pewnego N. Wtedy $\mathfrak{g}^N = \mathfrak{a}$ i, jeśli $\mathfrak{a}^M = \{0\}$, to $\mathfrak{g}^{N+M} = \mathfrak{a}^M = \{0\}$. $\square$

LEMAT *Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego, a $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \subset \mathfrak{g}$ jej ideałami rozwiązalnymi. Wtedy $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$ też jest ideałem rozwiązalnym.*

Dowód: Suma dwóch ideałów jest ideałem (oczywiste). Mamy izomorfizm algebr Liego $(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)/\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_1/\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2$. Ostatnia algebra jest rozwiązalna, a ideał $\mathfrak{a}_2 \subset \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$ też jest rozwiązalny. Stąd $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$ jest algebrą rozwiązalną. $\square$

Sumę wszystkich ideałów rozwiązalnych danej algebry Liego $\mathfrak{g}$ nazywamy *radykałem* tej algebry i oznaczamy $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$. Następujące twierdzenie przyjmiemy bez dowodu.

TWIERDZENIE *Niech $\mathfrak{g}$ będzie dowolną algebrą Liego. Wtedy*

1. $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]^\perp$ *(dopełnienie ortogonalne w sensie formy Killinga $B_\mathfrak{g}$);*
2. *algebra ilorazowa $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ jest półprosta;*
3. *rozszerzenie $0 \to \mathfrak{r}(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) \to 0$ jest rozszczepialne.*

Uwagi: Z pierwszego punktu wynika, że radykał algebry półprostej jest trywialny. Ostatni punkt jest znany jako twierdzenie Leviego. Wynika z niego, że każda algebra Liego $\mathfrak{g}$ jest iloczynem półprostym $\mathfrak{g}_2 \ltimes \mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ swojego radykału oraz pewnej algebry półprostej $\mathfrak{g}_2$. Algebry półproste są sklasyfikowane. Klasyfikacja algebr rozwiązalnych to problem otwarty.

PRZYKŁAD: Niech $\mathfrak{g}_2 := \mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ będzie algebrą Liego grupy obrotów. Wtedy $\mathfrak{g}_2$ działa w sposób naturalny na $\mathbb{R}^n$ za pomocą włożenia $f : \mathfrak{g}_1 \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$. Odpowiedni iloczyn półprosty $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_2 \ltimes \mathbb{R}^n$ nazywamy algebrą *euklidesową* i oznaczamy $\mathfrak{e}(n, \mathbb{R})$. Jest to algebra Liego grupy Liego przekształceń euklidesowych $\mathbb{R}^n$. Tutaj $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = \mathbb{R}^n$ jest ideałem abelowym.

8 Podalgebry Cartana i rozkład na podprzestrzenie pierwiastkowe. Cz. I

Literatura dodatkowa: [Hel00]

W tym wykładzie będziemy zakładać, że $\mathfrak{g}$ jest półprostą algebrą Liego nad $\mathbb{C}$. Naszym celem jest badanie struktury takich algebr.

Podalgebra Cartana $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$: Jest to podalgebra Liego o własnościach: 1) $\mathfrak{h}$ jest maksymalna abelową podalgebrą Liego w $\mathfrak{g}$ (czyli każda abelowa podalgebra $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{g}$ zawierająca $\mathfrak{h}$ pokrywa się z $\mathfrak{h}$); 2) dla dowolnego $X \in \mathfrak{h}$ endomorfizm $\mathrm{ad}_X \in \mathrm{End}(\mathfrak{g})$ jest półprosty (= diagonalizowalny).

Okazuje się, że w każdej półprostej $\mathfrak{g}$ istnieje podalgebra Cartana (zob. twierdzenie poniżej) oraz że każde dwie podalgebry Cartana $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ są „sprzężone”, czyli istnieje $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ takie, że $\sigma\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_2$.

Elementy regularne a podalgebry Cartana: Niech $H \in \mathfrak{g}$, oznaczmy $\mathfrak{g}(H, \lambda) := \{X \in \mathfrak{g} \mid (\mathrm{ad}_H - \lambda\,\mathrm{Id})^k X = 0$ dla pewnego $k\}$. Przestrzeń $\mathfrak{g}(H, \lambda)$ jest zerowa, jeśli λ nie należy do spektrum ad_H, lub pokrywa się z przestrzenią pierwiastkową endomomorfizmu ad_H, jeśli λ jest jedną z wartości własnych.

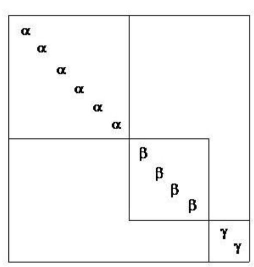
Element $H \in \mathfrak{g}$ nazywamy *regularnym*, jeśli

$$\dim \mathfrak{g}(H, 0) = \min_{X \in \mathfrak{g}} \dim \mathfrak{g}(X, 0).$$

Zauważmy, że przestrzeń $\mathfrak{g}(H, 0)$ zawiera podalgebrę $\mathfrak{g}_H := \{X \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{ad}_X H = 0\}$ będącą algebrą Liego stabilizatora $G_H := \{x \in G \mid \mathrm{Ad}_x H = H\}$ elementu H względem działania dołączonego. Jeśli ad_H jest półprosty, rozkład Jordana pokazuje, że $\mathfrak{g}(H, 0) = \ker \mathrm{ad}_H = \mathfrak{g}_H$.

Przykład: Niech $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, a $H \in \mathfrak{g}$ będzie macierzą diagonalną. Wtedy ad_H będzie endomorfizmem półprostym. Istotnie, macierze $H_{12} := E_{11} - E_{22}, H_{23} := E_{22} - E_{33}, \ldots, H_{n-1,n} := E_{n-1,n-1} - E_{nn}$ tworzą bazę przestrzeni $\mathfrak{h}$ macierzy diagonalnych bezśladowych i H można wyrazić jako kombinację liniową tych macierzy. Z drugiej strony $\mathrm{ad}_{H_{ij}}$ jest diagonalny w bazie $H_{i'j'}, E_{kl}, k \neq l$: $[H_{ij}, H_{i'j'}] = 0, [H_{ij}, E_{ij}] = 2E_{ij}, [H_{ij}, E_{ji}] = -2E_{ji}, [H_{ij}, E_{ij'}] = E_{ij'}, j' \neq j, [H_{ij}, E_{i'j}] = -E_{i'j}, i' \neq i$.

Stąd $\mathfrak{g}(H, 0) = \mathfrak{g}_H$. Niech teraz H_0, ma spektrum proste (czyli nie ma krotnych wartości własnych). Łatwo widzieć, że wtedy $\mathfrak{g}_H = \mathfrak{h}$. W przypadku, gdy H ma krotności w spektrum, algebra $\mathfrak{g}_H$ jest większa, jak to ilustruje następujący rysunek:



Ćwiczenie: pokaż, że $\dim \mathfrak{g}(H, 0) = \dim \mathfrak{g}_H = n - 1$ jest minimalnym możliwym wymiarem, czyli H jest elementem regularnym w przypadku prostego spektrum (*skorzystaj z rozkładu Jordana*). W ogólności jest prawdziwe następujące twierdzenie, które przyjmujemy bez dowodu.

Twierdzenie *Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą półprostą nad $\mathbb{C}$, a $H_0 \in \mathfrak{g}$ będzie elementem regularnym. Wtedy $\mathfrak{g}(H_0, 0)$ jest podalgebrą Cartana w $\mathfrak{g}$.*

Pierwiaski i podprzestrzenie pierwiaskowe:

Lemat *Niech $A, B \in \mathrm{End}(V)$ będą półprostymi komutującymi endomorfizmami przestrzeni liniowej V. Wtedy A i B są jednocześnie diagonalizowalne, czyli istnieje baza przestrzeni V składająca się z wektorów własnych operatorów A i B.*

Dowód: Niech $v \in V$ będzie wektorem własnym operatora A odpowiadającym wartości własnej λ: $Av = \lambda v$. Wtedy Bv też jest wektorem własnym operatora A odpowiadającym wartości własnej λ: $ABv = BAv = B\lambda v = \lambda Bv$. Stąd podprzestreń własna $V' := V(A, \lambda) = \{v \in V \mid Av = \lambda v\}$ operatora A jest podprzestrzenią niezmienniczą operatora B. Ograniczenie $B|_{V'}$ jest operatorem diagonalizowalnym, czyli istnieje baza przestrzeni V', w której $B|_{V'}$ jest diagonalny. W tej że bazie $A|_{V'}$ jest skalarny. Wybierając podobne bazy we wszystkich przestrzeniach własnych operatora A, otrzymujemy wynik. □

W dalszej części wykładu $\mathfrak{h}$ będzie oznaczało ustaloną podalgebrę Cartana w $\mathfrak{g}$.

Zauważmy, że operatory $\mathrm{ad}_H, H \in \mathfrak{h}$, są diagonalizowalne i komutujące, skąd wnioskujemy, że w $\mathfrak{g}$ istnieje baza złożona z wektorów własnych wszystkich operatorów ad_H. Niech $X \in \mathfrak{g}$ będzie elementem takiej bazy. Wtedy $\mathrm{ad}_H X = \alpha(H)X$, gdzie $\alpha(H)$ odpowiednia wartość własna. Okazuje się, że α *liniowo* zależy od H. Istotnie, $\alpha(\beta_1 H_1 + \beta_2 H_2)X = \mathrm{ad}_{\beta_1 H_1 + \beta_2 H_2} X = \beta_1 \mathrm{ad}_{H_1} X + \beta_2 \mathrm{ad}_{H_2} X = (\beta_1 \alpha(H_1) + \beta_2 \alpha(H_2))X$.

Niech teraz $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ będzie dowolnym funkcjonałem liniowym na $\mathfrak{h}$. Oznaczmy

$$\mathfrak{g}^\alpha := \{X \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{ad}_H X = \alpha(H)X \ \forall H \in \mathfrak{h}\}.$$

Funkcjonał α nazywamy *pierwiastkiem* $\mathfrak{g}$ względem $\mathfrak{h}$, jeśli $\mathfrak{g}^\alpha \neq \{0\}$ (a odpowiednie $\mathfrak{g}^\alpha$ nazywamy *podprzestrzenią pierwiastkową*).

Lemat *1. $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h}$;*

2. dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$ mamy $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta] \subset \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$.

Dowód: Ad. 1. Mamy $\mathfrak{g}^0 = \{X \in \mathfrak{g} \mid [\mathfrak{h}, X] = 0\}$, czyli $\mathfrak{g}^0$ składa się z elementów $\mathfrak{g}$ komutujących z $\mathfrak{h}$. Ale $\mathfrak{h}$ z definicji jest maksymalną podalgebrą abelową, czyli takie elementy leża jedynie w $\mathfrak{h}$.
Ad. 2. niech $X \in \mathfrak{g}^\alpha, Y \in \mathfrak{g}^\beta$. Wtedy $\mathrm{ad}_H[X, Y] = [\mathrm{ad}_H X, Y] + [X, \mathrm{ad}_H Y] = (\alpha(H) + \beta(H))[X, Y]$ dla dowolnego $H \in \mathfrak{h}$, skąd $[X, Y] \in \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$. □

Niech $\Delta \subset \mathfrak{h}^*$ oznacza zbiór *niezerowych* pierwiastków.

Twierdzenie *1.* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}^\alpha$ *(suma prosta podprzestrzeni).*

2. $\dim \mathfrak{g}^\alpha = 1$ *dla każdego $\alpha \in \Delta$.*

3. Niech α, β będą dwoma pierwiastkami o własności $\alpha + \beta \neq 0$. Wtedy $B_\mathfrak{g}(\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta) = 0$.

4. Ograniczenie $B_\mathfrak{g}|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ jest niezdegenerowane. W szczególności dla każdego $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ istnieje jedyny element $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ taki, że $B_\mathfrak{g}(H, H_\alpha) = \alpha(H)$ dla wszystkich $H \in \mathfrak{h}$.

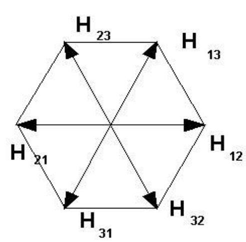
5. *Jeśli* $\alpha \in \Delta$, *to* $-\alpha \in \Delta$ *oraz*
$$[\mathfrak{g}^{\alpha}, \mathfrak{g}^{-\alpha}] = \mathbb{C}H_{\alpha},$$
przy czym $\alpha(H_{\alpha}) \neq 0$.

Dowód w następnym Wykładzie.

PRZYKŁAD: Niech $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C}) =: \mathfrak{a}_n$ oraz $H_i := E_{ii} - E_{i+1,i+1}, i = 1, \ldots, n$. Wtedy $\mathfrak{h} = \sum_i \mathbb{C}H_i$ (algebra diagonalnych macierzy bezśladowych) oraz
$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{i \neq j} \mathbb{C}E_{ij}.$$
Dla $H \in \mathfrak{h}$ niech $e_i(H)$ oznacza odpowiedni element diagonalny. Mamy
$$[H, E_{ij}] = (e_i(H) - e_j(H))E_{ij},$$
czyli pierwiastek odpowiadający przestrzeni pierwiastkowej $\mathbb{C}E_{ij}$ jest równy $e_i - e_j \in \mathfrak{h}^*, ij \in \{1, \ldots, n+1\}$.

Już obliczyliśmy, że $B_{\mathfrak{g}}(X, Y) = 2(n+1)\,\mathrm{Tr}(XY), X, Y \in \mathfrak{g}$. Jasne, że ograniczenie takiej formy na $\mathfrak{h}$ jest niezdegenerowane. W szczególności, $B_{\mathfrak{g}}(H, H_{ij}) = (e_i - e_j)(H)$ dla macierzy $H_{ij} = \frac{1}{2(n+1)}(E_{ii} - E_{jj})$.

Rozważmy przestrzeń $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} := \sum_{ij} \mathbb{R}H_{ij}$. W przypadku $n = 2$ jest to 2-wymiarowa przestrzeń rzeczywista, a układ pierwiastków wygląda w niej następująco:



9 Podalgebry Cartana i rozkład na podprzestrzenie pierwiastkowe. Cz. II

Literatura dodatkowa: [Hel00]

PRZYKŁAD: Niech $\mathfrak{g} := \mathfrak{so}(2n,\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2n,\mathbb{C}) \mid X + X^T = 0\} =: \mathfrak{d}_n$ oraz $H_1 := E_{12} - E_{21}, H_2 = E_{34} - E_{43}, \ldots, H_n := E_{2n-1,2n} - E_{2n,2n-1}$, czyli $H_i := E_{2i-1,2i} - E_{2i,2i-1}, i = 1,\ldots,n$. Oznaczmy też $F_{ij} := E_{ij} - E_{ji}$ oraz

$$G^+_{jk} := F_{2j-1,2k-1} + F_{2j,2k} + i(F_{2j-1,2k} - F_{2j,2k-1})$$

$$G^-_{jk} := F_{2j-1,2k-1} - F_{2j,2k} + i(F_{2j-1,2k} + F_{2j,2k-1}),$$

gdzie $j,k \in \{1,\ldots,n\}, j \neq k$. Na przykład dla $n = 2$ mamy:

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, G^+_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ -1 & i & 0 & 0 \\ -i & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, G^-_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & i & -1 \\ -1 & -i & 0 & 0 \\ -i & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G^+_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & i \\ 0 & 0 & -i & -1 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ -i & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, G^-_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & i \\ 0 & 0 & i & 1 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ -i & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bezpośrednio sprawdzają się (*Ćwiczenie*) wzory

$$[H, G^+_{jk}] = (e_j(H) - e_k(H))G^+_{jk} \quad (1 \leq j \neq k \leq n)$$

$$[H, G^-_{jk}] = -(e_j(H) + e_k(H))G^-_{jk} \quad (1 \leq j < k \leq n)$$

$$[H, G^-_{jk}] = (e_j(H) + e_k(H))G^-_{jk} \quad (1 \leq k < j \leq n),$$

gdzie $e_j(H_k) = -i\delta_{jk}$. Stad widzimy, że podalgebrą Cartana jest

$$\mathfrak{h} := \sum_i \mathbb{C}H_i,$$

a rozkład na podprzestrzenie pierwiastkowe wygląda tak:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{j\neq k} \mathbb{C}G^+_{jk} + \sum_{j\neq k} \mathbb{C}G^-_{jk}.$$

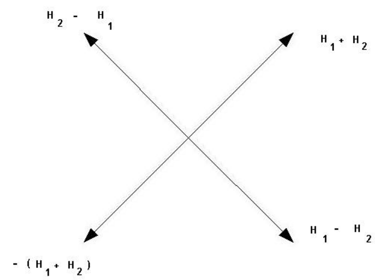
Teraz możemy obliczyć formę Killinga: $B_{\mathfrak{g}}(H,H) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}^2_H) = \sum_{j\neq k}((e_j(H) - e_k(H))^2 + (e_j(H) + e_k(H))^2) = 2\sum_{j\neq k}(e_j(H)^2 + e_k(H)^2) = 4\sum_{j<k}(e_j(H)^2 + e_k(H)^2) = 4(n-1)\sum_{i=1}^n e_i(H)^2 = 2(n-1)\,\mathrm{Tr}(H^2)$. Prawie każdy element z $\mathfrak{g}$ jest sprzężony do pewnej macierzy z $\mathfrak{h}$ (przyjmujemy to bez

dowodu). Stąd wnioskujemy (podobnie jak to robiliśmy dla $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$), że $B_{\mathfrak{g}}(X,Y) = (2n-2)\operatorname{Tr}(XY)$ i, że $\mathfrak{g}$ jest półprosta.

Pierwiastki są dane przez

$$e_i - e_j \ (1 \leq i,j \leq n), \ \pm(e_i + e_k) \ (1 \leq j < k \leq n).$$

Rozważmy przestrzeń $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} := \sum_i \mathbb{R}H_i$. W przypadku $n = 2$ jest to 2-wymiarowa przestrzeń rzeczywista, a układ pierwiastków wygląda w niej następująco:



Przykład: Niech $\mathfrak{g} := \mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2n+1,\mathbb{C}) \mid X + X^T = 0\} =: \mathfrak{b}_n$. Podalgebrę Cartana określamy jak wcześniej $\mathfrak{h} := \sum_{i=1}^n \mathbb{C}H_i$. Wprowadźmy dodatkowo macierze

$$D_j^{\pm} := F_{2j-1,2n+1} \pm iF_{2j,2n+1} \ (1 \leq j \leq n).$$

Na przykład dla $n = 2$ mamy

$$D_1^{\pm} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pm i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \mp i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_2^{\pm} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pm i \\ 0 & 0 & -1 & \mp i & 0 \end{bmatrix}.$$

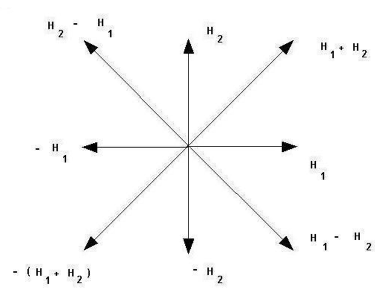
Sprawdzamy (*Ćwiczenie*), że $[H, D_j^{\pm}] = \mp e_j(H) D_j^{\pm}$. Stąd mamy rozkład na podprzestrzenie pierwiastkowe

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{j\neq k} \mathbb{C}G_{jk}^+ + \sum_{j\neq k} \mathbb{C}G_{jk}^- + \sum_{j=1}^n \mathbb{C}D_j^+ + \sum_{j=1}^n \mathbb{C}D_j^-.$$

Argumenty podobne do powyższych pokazują, że $B_{\mathfrak{g}}(X,Y) = (2n-1)\operatorname{Tr}(XY)$ oraz, że $\mathfrak{g}$ jest półprosta. Pierwiastki są dane przez

$$\pm e_i \ (1 \leq i \leq n), \ e_i - e_j \ (1 \leq i,j \leq n), \ \pm(e_i + e_k) \ (1 \leq j < k \leq n),$$

a dla $n = 2$ w przestrzeni $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ wyglądają tak:



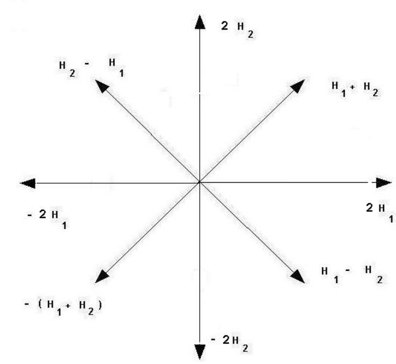
PRZYKŁAD Niech $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n,\mathbb{C}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2n,\mathbb{C}) \mid XJ + JX = 0\} =: \mathfrak{c}_n$, tutaj $J := \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$ jest macierzą $2n \times 2n$. (*Ćwiczenie:* sprawdź, że macierze z $\mathfrak{g}$ mają postać $\begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{bmatrix}$, gdzie $A, B, C \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, przy czym B, C symetryczne). Podalgebra Cartana ma postać $\mathfrak{h} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{C}H_i$, gdzie $H_i := E_{ii} - E_{n+i,n+i}$, pierwiastki dane są wzorem $e_i(H_j) = \delta_{ij}$. Rozkład na podprzestrzenie pierwiastkowe jest następujący

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{i \leq j} \mathbb{C}(E_{n+i,j} + E_{n+j,i}) + \sum_{i \leq j} \mathbb{C}(E_{i,n+j} + E_{j,n+i}) + \sum_{i \neq j} \mathbb{C}(E_{ij} - E_{n+j,n+i}).$$

Forma Killinga ma postać $B_{\mathfrak{g}}(X,Y) = (2n+2)\,\mathrm{Tr}(XY)$, a układ pierwiastków

$$\pm e_i \ (1 \leq i \leq n), \ \pm e_i \pm e_j \ (1 \leq i < j \leq n).$$

Dla $n = 2$ mamy (w $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$)



Forma Killinga w tym przypadku ma postać $B_{\mathfrak{g}}(X,Y) = (2n+2)\,\mathrm{Tr}(XY)$.

Dowód twierdzenia z poprzedniego wykładu: Ad. 1. Wykażemy, że suma $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}^{\alpha}$ jest prosta. Niech $H' \in \mathfrak{h}, X_{\alpha_i} \in \mathfrak{g}^{\alpha_i}$ (pierwiastki α_i są różne i niezerowe) będą takie, że $H' + \sum_i X_{\alpha_i} = 0$. Wtedy można wybrać $H \in \mathfrak{h}$ tak, żeby $\alpha_i(H)$ były liczbami różnymi i niezerowymi (bo zbiór takich $H \in \mathfrak{h}$, że któreś $\alpha_i(H)$ są zerowe lub pokrywają się, jest sumą skończonej liczby hiperpłaszczyzn). Stąd wnioskujemy, że H', X_{α_i} leżą w podprzestrzeniach własnych endomorfizmu ad_H odpowiadających różnym wartościom własnym, czyli są liniowo niezależne.

Ad. 3. Niech $X \in \mathfrak{g}^{\alpha}, Y \in \mathfrak{g}^{\beta}, \alpha + \beta \neq 0$. Wtedy dla dowolnego pierwiastka γ endomorfizm $\mathrm{ad}_X \mathrm{ad}_Y$ odwzorowuje $\mathfrak{g}^{\gamma}$ w $\mathfrak{g}^{\alpha+\beta+\gamma}$ oraz $\mathfrak{g}^{\gamma} \cap \mathfrak{g}^{\alpha+\beta+\gamma} = \{0\}$. Wybierzmy teraz bazę w $\mathfrak{g}$, każdy element której leży w pewnym $\mathfrak{g}^{\gamma}$. W takiej bazie macierz $\mathrm{ad}_X \mathrm{ad}_Y$ będzie miała zerowe elementy na diagonali, czyli $B_{\mathfrak{g}}(X,Y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_X \mathrm{ad}_Y) = 0$.

Ad. 4. Niech $H_0 \in \mathfrak{h}$ będzie takie, że $B_{\mathfrak{g}}(H_0, H) = 0$ dla dowolnego $H \in \mathfrak{h}$. Wtedy punkt 3 pokazuje, że $B_{\mathfrak{g}}(H_0, X) = 0$ dla dowolnego $X \in \mathfrak{g}$. Ponieważ z definicji $B_{\mathfrak{g}}$ jest niezdegenerowana, mamy $H_0 = 0$.

10 Podalgebry Cartana i rozkład na podprzestrzenie pierwiastkowe. Cz. III

Literatura dodatkowa: [Hel00]

Zakończenie dowodu twierdzenia z Wykładu 8: Ad. 5. Niech $\alpha \in \Delta$. Wtedy $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ nie może być zerowe, bo to implikowałoby (na mocy punktu 3) ortogonalność $\mathfrak{g}^{\alpha}$ do całej $\mathfrak{g}$. Stąd $-\alpha \in \Delta$.

Niech $H \in \mathfrak{h}, X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha, X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$. Wiemy, że $[X_\alpha, X_{-\alpha}] \subset \mathfrak{h}$. Ponadto $B_\mathfrak{g}([X_\alpha, X_{-\alpha}], H) = -B_\mathfrak{g}(X_{-\alpha}, [X_\alpha, H]) = B_\mathfrak{g}(X_{-\alpha}, [H, X_\alpha]) = B_\mathfrak{g}(X_{-\alpha}, \alpha(H)X_\alpha) = \alpha(H)B_\mathfrak{g}(X_\alpha, X_{-\alpha}) = B_\mathfrak{g}(H_\alpha, H)$ $B_\mathfrak{g}(X_\alpha, X_{-\alpha}) = B_\mathfrak{g}(B_\mathfrak{g}(X_\alpha, X_{-\alpha})H_\alpha, H)$. Z niezgegenerowaności $B_\mathfrak{g}|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$ (punkt 4) wnioskujemy, że

$$[X_\alpha, X_{-\alpha}] = B_\mathfrak{g}(X_\alpha, X_{-\alpha})H_\alpha.$$

Teraz udowodnimy, że $\alpha(H_\alpha) \neq 0$. Niech $E_\alpha := X_\alpha, X_{-\alpha} \neq 0$. Wtedy $B_\mathfrak{g}(X_\alpha, X_{-\alpha}) \neq 0$ (inaczej X_α byłoby ortogonalne do $\mathfrak{g}$). Można tak wybrać wektor $E_{-\alpha}$ proporcjonalny do $X_{-\alpha}$, żeby

$$B_\mathfrak{g}(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1.$$

Dla pierwiastka β oznaczmy $\mathfrak{g}(\beta, \alpha) := \sum_{n\in N} \mathfrak{g}^{\beta+n\alpha}$, gdzie N jest zbiorem tych $n \in \mathbb{Z}$, dla których $\beta + n\alpha$ jest pierwiastkiem. Z tożsamości $[g^{\alpha'}, \mathfrak{g}^{\beta'}] \subset \mathfrak{g}^{\alpha'+\beta'}$ wnioskujemy, że $\mathfrak{g}(\beta, \alpha)$ jest podprzestrzenią niezmienniczą dla $\mathrm{ad}_{E_\alpha}, \mathrm{ad}_{E_{-\alpha}}, \mathrm{ad}_H$. Ponieważ $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha$, mamy

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{H_\alpha}|_{\mathfrak{g}(\beta,\alpha)}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{[E_\alpha,E_{-\alpha}]}|_{\mathfrak{g}(\beta,\alpha)}) = \mathrm{Tr}([\mathrm{ad}_{E_\alpha}, \mathrm{ad}_{E_{-\alpha}}]|_{\mathfrak{g}(\beta,\alpha)}) = 0$$

(ślad dowolnego komutatora jest równy zero).

Z innej strony, ponieważ ad_{H_α} jest operatorem diagonalnym na $\mathfrak{g}(\beta, \alpha)$, mamy

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{H_\alpha}|_{\mathfrak{g}(\beta,\alpha)}) = \sum_{n\in N} (\beta + n\alpha)(H_\alpha) \dim \mathfrak{g}^{\beta+n\alpha}.$$

Stąd $\beta(H_\alpha) \sum_{n\in N} \dim \mathfrak{g}^{\beta+n\alpha} = -\alpha(H_\alpha) \sum_{n\in N} n \dim \mathfrak{g}^{\beta+n\alpha}$ dla każdego $\alpha \in \Delta$ i każdego pierwiastka β. Gdyby $\alpha(H_\alpha) = 0$, mielibyśmy $\beta(H_\alpha) = 0$ (bo $\dim \mathfrak{g}^{\beta+n\alpha} \geq \dim \mathfrak{g}^\beta > 0$). Z kolei to powodowałoby równość $\mathrm{ad}_{H_\alpha}\mathfrak{g}^\beta = 0$ (bo $\mathrm{ad}_{H_\alpha} X_\beta = \beta(H_\alpha)X_\beta, X_\beta \in \mathfrak{g}^\beta$), czyli $\mathrm{ad}_{H_\alpha} = 0$, co jest niemożliwe z powodu trywialności centrum $\mathfrak{g}$.

Ad. 2. Załóżmy, że $\dim \mathfrak{g}^\alpha > 1$. Wtedy istnieje takie $D_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha, D_\alpha \neq 0$, że $B_\mathfrak{g}(D_\alpha, E_{-\alpha}) = 0$. Oznaczmy $D_{-1} := 0, D_n := (\mathrm{ad}_{E_\alpha})^n D_\alpha, n = 0, 1, \ldots$. Wtedy $D_n \in \mathfrak{g}^{(n+1)\alpha}$ oraz $[E_{-\alpha}, D_n] = [E_{-\alpha}, (\mathrm{ad}_{E_\alpha})^n D_\alpha] = \mathrm{ad}_{E_\alpha}[E_{-\alpha}, (\mathrm{ad}_{E_\alpha})^{n-1}D_\alpha] - [\mathrm{ad}_{E_\alpha}E_{-\mathfrak{a}}, (\mathrm{ad}_{E_\alpha})^{n-1}D_\alpha] = \mathrm{ad}_{E_\alpha}[E_{-\alpha}, D_{n-1}] - [H_\alpha, D_{n-1}] = \mathrm{ad}_{E_\alpha}[E_{-\alpha}, D_{n-1}] - n\alpha(H_\alpha)D_{n-1}$. W szczególności, $[E_{-\alpha}, D_{n-1}] = \mathrm{ad}_{E_\alpha}[E_{-\alpha}, D_{n-2}] - (n-1)\alpha(H_\alpha)D_{n-2}$, dlatego $[E_{-\alpha}, D_n] = \mathrm{ad}_{E_\alpha}(\mathrm{ad}_{E_\alpha}[E_{-\alpha}, D_{n-2}] - (n-1)\alpha(H_\alpha)D_{n-2}) - n\alpha(H_\alpha)D_{n-1} = (\mathrm{ad}_{E_\alpha})^2[E_{-\alpha}, D_{n-2}] - (n-1)\alpha(H_\alpha)D_{n-1} - n\alpha(H_\alpha)D_{n-1}$. Stosując indukcję otrzymujemy

$$[E_{-\alpha}, D_n] = (\mathrm{ad}_{E_\alpha})^n[E_{-\alpha}, D_0] - (1 + 2 + \cdots + n)\alpha(H_\alpha)D_{n-1} = -\frac{n(n+1)}{2}\alpha(H_\alpha)D_{n-1}$$

(skorzystaliśmy z tego, że $[E_{-\alpha}, D_0] = [E_{-\alpha}, D_\alpha] = B_\mathfrak{g}(E_{-\alpha}, D_\alpha)H_\alpha = 0$). Ponieważ $D_0 \neq 0$, powyższa równość pokazuje, że $D_n \neq 0$ dla $n = 1, 2, \ldots$, co jest niemożliwe (zbiór pierwiastków jest skończony). □

Dalsze własności pierwiastków i rozkładu na podprzestrzenie pierwiastkowe: Niech $\alpha \in \Delta$, a β będzie dowolnym pierwiastkiem. Zbiór wszystkich pierwiastków postaci $\beta + n\alpha, n \in \mathbb{Z}$, nazywamy *$\alpha$-szeregiem zawierającym β.* Maksymalną z liczb n o tej własności, że $\beta + n\alpha$ jest pierwiastek będziemy oznaczać przez $q = q(\beta, \alpha)$, a minimalna przez $p = p(\beta, \alpha)$.

LEMAT *1. $\beta + n\alpha$ jest pierwiastkiem dla każdego $n, p \leq n \leq q$.*

2. $-2\frac{\beta(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)} = p + q$.

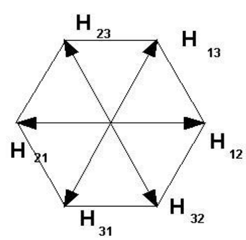
3. α-szereg zawierający 0 jest postaci $-\alpha, 0, \alpha$.

4. Układ pierwiastków Δ jest niezmienniczy ze względu na odbicia podalgebry Cartana $\mathfrak{h}$

$$s_\alpha : H \mapsto H - 2\frac{\alpha(H)}{\alpha(H_\alpha)} H_\alpha$$

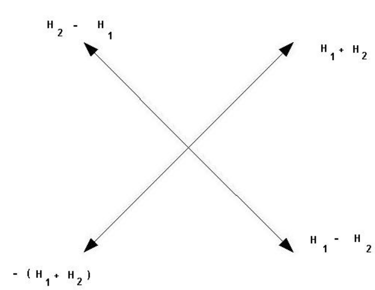
względem hiperpłaszczyzny $\{H \in \mathfrak{h} \mid \alpha(H) = 0\}$.

PRZYKŁAD:



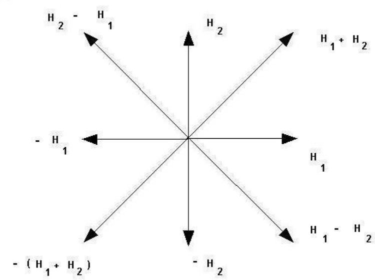
Niech $\alpha := H_{12}, \beta = H_{23}$. Wtedy α-szereg zawierający β to H_{23}, H_{13}, mamy też $p = 0, q = 1$. Podobnie, szereg będą tworzyły dowolne dwa sąsiednie pierwiastki. Są też szeregi jak w p. 2 powyższego lematu.

PRZYKŁAD:



Tutaj są szeregi wyłącznie jak w p. 2 lematu.

PRZYKŁAD:



Tutaj mamy kilka typów szeregów. Przykładowo, dla $\alpha = H_1, \beta = H_2$ mamy szereg $H_2 - H_1, H_2, H_2 + H_1$ z $p = -1, q = 1$. Dla $\alpha = H_1, \beta = H_1 + H_2$ mamy szereg $H_2 - H_1, H_2, H_2 + H_1$ z $p = -2, q = 0$. Dla $\alpha = H_1, \beta = H_2 - H_1$ mamy $H_2 - H_1, H_2, H_2 + H_1$ z $p = 0, q = 2$. Dla $\alpha = H_2 - H_1, \beta = H_1$ mamy H_1, H_2 z $p = 0, q = 1$. Są też szeregi jak w p. 2 powyższego lematu.

Dowód lematu: Ad. 1,2. Niech $E_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha, E_{-\alpha} \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ będą takie, że $B(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1$. Niech $r, s \in \mathbb{Z}$ będą takie, że $\beta + n\alpha$ jest pierwiastkiem dla dowolnego $n, r \leq n \leq s$, ale nie jest nim dla $n = r-1, s+1$. Taki α-szereg zawierający β nazwiemy *prawidłowym* .

Znowu podprzestrzeń $\mathfrak{g}' := \sum_{n=r}^{s} \mathfrak{g}^{\beta+n\alpha}$ jest niezmiennicza dla operatorów $\mathrm{ad}_{E_\alpha}, \mathrm{ad}_{E_{-\alpha}}, \mathrm{ad}_H$. Ponieważ $H_\alpha = [E_\alpha, E_{-\alpha}]$, mamy $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{H_\alpha}|_{\mathfrak{g}'}) = 0$. Z innej strony, $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{H_\alpha}|_{\mathfrak{g}'}) = \sum_{n=r}^{s} (\beta + n\alpha)(H_\alpha)$ i, ponieważ $\alpha(H_\alpha) \neq 0$, mamy

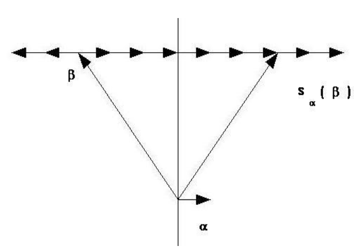
$$\frac{\beta(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)} = -\sum_{n=r}^{s} n = -\frac{r+s}{2}.$$

Jasne, że każdy α-szereg zawierający β składa się z szeregów prawidłowych. Powyższa równość pokazuje, że taki składnik może być tylko jeden.

Ad. 3.- bez dowodu.

Ad. 4. Niech $V, (|)$ będzie przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym. Dla $\alpha \in V^*$ odbicie prostopadłe w hiperpłaszczyznie $\{v \in V \mid \alpha(v) = 0\}$ jest dane wzorem $v \mapsto v - 2\frac{(v|v_\alpha)}{(v_\alpha|v_\alpha)} v$, tutaj v_α definiujemy przez $(v_\alpha|v) = \alpha(v), v \in V$ (*Ćwiczenie*).

Z punktu 2 mamy $s_\alpha(H_\beta) = H_\beta - 2\frac{\alpha(H_\beta)}{\alpha(H_\alpha)} H_\alpha = H_\beta - 2\frac{B_\mathfrak{g}(H_\alpha, H_\beta)}{B_\mathfrak{g}(H_\alpha, H_\alpha)} H_\alpha = H_\beta - 2\frac{\beta(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)} H_\alpha = H_\beta + (p + q)H_\alpha$. Stad wynika, że $p \leq p + q \leq q$, czyli $s_\alpha(H_\beta)$ jest wektorem pierwiastkowym. Istotnie, niech β leży po innej stronie hiperpłaszczyzny $\alpha^\perp$ niż α (utożsamiamy $\mathfrak{h}$ i $\mathfrak{h}^*$ za pomocą $B_\mathfrak{g}|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}}$). Wtedy $p \leq 0, q \geq 0$ i $q \leq p + q \leq q$ (zob. rysunek). Podobnie rozumujemy, jeśli β i α leżą po tej samej stronie.



$\square$

11 Istotność układu pierwiastków. Formy rzeczywiste zespolonych półprostych algebr Liego

Literatura dodatkowa: [Hel00]

Część rzeczywista podalgebry Cartana:

LEMAT *Niech $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} := \sum_{\alpha\in\Delta} \mathbb{R}H_\alpha$. Wtedy*

1. *Ograniczenie $b_{\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}}$ formy Killinga $B_{\mathfrak{g}}$ do $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \times \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ jest dodatnio określoną formą rzeczywistą.*

2. *$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} + i\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ (suma prosta).*

Dowód: Ad. 1. Dla $H, H' \in \mathfrak{h}$ mamy $B_{\mathfrak{g}}(H, H') = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_H \circ \mathrm{ad}_{H'}) = \sum_{\beta\in\Delta} \beta(H)\beta(H')$ (ostatnia równość obowiązuje ponieważ w bazie $\mathfrak{g}$ złożonej z dowolnej bazy $\mathfrak{h}$ oraz wektorów $E_\beta, \beta \in \Delta$, macierz operatora ad_H ma postać blokową postaci $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$, gdzie D jest macierzą diagonalna o wyrazach $\beta(H)$ na diagonali (wartości własne odpowiadające wektorom własnym E_β). Z lematu w Wykładzie 10 wiemy, że $-2\frac{\beta(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)} = p(\beta, \alpha) + q(\beta, \alpha)$, gdzie $p(\beta, \alpha), q(\beta, \alpha) \in \mathbb{Z}$. Stąd

$$\alpha(H_\alpha) = B_{\mathfrak{g}}(H_\alpha, H_\alpha) = \sum_{\beta\in\Delta} \beta^2(H_\alpha) = \frac{1}{4}\sum_{\beta\in\Delta} \alpha^2(H_\alpha)(p(\beta, \alpha) + q(\beta, \alpha))^2.$$

Dalej obliczamy $\alpha(H_\alpha)$ (o którym już wiemy, że jest $\neq 0$) i widzimy, że $\alpha(H_\alpha)$ jest rzeczywiste (i dodatnie), co daje też rzeczywistość $\beta(H_\alpha)$ (znowu korzystamy ze wzoru z lematu). W konsekwencji mamy rzeczywistość $\beta(H)$ dla $H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ (bo każde takie H jest kombinacją liniową H_α o współczynnikach rzeczywistych), oraz $B_{\mathfrak{g}}(H, H')$ dla $H, H' \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$.

Żeby udowodnić niezdegenerowaność $B_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}\times\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}}$ zauważmy, że ma miejsce implikacja $\alpha(H) = 0 \forall\alpha \in \Delta \Longrightarrow H = 0$. Istotnie, niech $\alpha(H) = 0$ dla wszystkich $\alpha \in \Delta$. Z rozkładu $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}^\alpha$ wynika wtedy, że $[H, X] = 0$ dla wszystkich $X \in \mathfrak{g}$, czyli H jest elementem centrum, które jest trywialne.

Niech teraz $H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ będzie takie, że $B_{\mathfrak{h}}(H, H') = 0$ dla wszystkich $H' \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$. Wtedy w szczególności $B_{\mathfrak{h}}(H, H) = \sum_{\beta\in\Delta} \beta^2(H) = 0$ skąd $\beta(H) = 0$ dla dowolnego $\beta \in \Delta$.

Ad. 2. Bez dowodu. □

Istotność układu pierwiastków:

TWIERDZENIE *Niech $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{g}'$ będą dwiema półprostymi algebrami Liego (nad $\mathbb{C}$), a $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'$ ich podalgebrami Cartana. Niech Δ, Δ' będą odpowiednimi układami pierwiastków niezerowych i niech $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} := \sum_{\alpha\in\Delta} \mathbb{R}H_\alpha, \mathfrak{h}'_{\mathbb{R}} := \sum_{\alpha'\in\Delta'} \mathbb{R}H_{\alpha'}$ (możemy patrzeć na Δ, Δ' jako na podzbiory w przestrzeniach dualnych $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}, (\mathfrak{h}'_{\mathbb{R}})^*$, ponieważ $\beta(H), \beta'(H') \in \mathbb{R}$ dla $\beta \in \Delta, \beta' \in \Delta', H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}, H' \in \mathfrak{h}'_{\mathbb{R}}$).*

Załóżmy, że istnieje $\mathbb{R}$-liniowy izomorfizm $\phi : \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \to \mathfrak{h}'_{\mathbb{R}}$ taki, że $\phi^*(\Delta') = \Delta$, gdzie $\phi^* : (\mathfrak{h}'_{\mathbb{R}})^* \to \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ jest odwzorowaniem dualnym. Wtedy istnieje $\mathbb{C}$-izomorfizm algebr Liego $\Phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ taki, że $\Phi|_{\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}} = \phi$.

Idea dowodu: Najpierw wybiera się wektory $E_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha, \alpha \in \Delta$, tak, żeby $B_{\mathfrak{g}}(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1$ (można to zrobić, ponieważ $B_{\mathfrak{g}}(X_\alpha, X_{-\alpha}) \neq 0$ dla niezerowych $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha, X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$). Dla każdej pary $\alpha, \beta \in \Delta$ takiej, że $\alpha + \beta \in \Delta$ istnieje niezerowe $N_{\alpha,\beta} \in \mathbb{C}$ takie, że $[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha,\beta}E_{\alpha+\beta}$.

Dalej konstruuje się wektory $E_{\alpha'} \in \mathfrak{g}'^{\alpha'}, \alpha' \in \Delta'$, takie, że: 1) $B_{\mathfrak{g}'}(E_{\alpha'}, E_{-\alpha'}) = 1$; 2) $[E_{\alpha'}, E_{\beta'}] = N_{\alpha,\beta}E_{\alpha'+\beta'}$, gdzie $\alpha = \phi^*(\alpha'), \beta = \phi^*(\beta')$. Stosuje się do tego własności współczynników $N_{\alpha,\beta}$ wynikające z tożsamości Jacobiego oraz specjalną indukcję.

Odwzorowanie przedłużające ϕ wzorem $\Phi : E_\alpha \mapsto E_{\alpha'}$ będzie szukanym izomorfizmem algebr Liego. Istotnie, $\Phi[H, E_\alpha] = \Phi\alpha(H)E_\alpha = \alpha(H)E_{\alpha'} = \alpha'(\phi H)E_{\alpha'} = [\Phi H, \Phi E_\alpha]$. Dla $\alpha, \beta \in \Delta$ takich, że $\alpha + \beta \in \Delta$ mamy $\Phi[E_\alpha, E_\beta] = \Phi N_{\alpha,\beta}E_{\alpha+\beta} = N_{\alpha,\beta}E_{\alpha'+\beta'} = [E_{\alpha'}, E_{\beta'}] = [\Phi E_\alpha, \Phi E_\beta]$. Na koniec $\Phi[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \Phi B_{\mathfrak{g}}(E_\alpha, E_{-\alpha})H_\alpha = \Phi H_\alpha = H_{\alpha'} = [E_{\alpha'}, E_{-\alpha'}] = [\Phi E_\alpha, \Phi E_{-\alpha}]$. □

Kompleksyfikacja, urzeczywistnienie i formy rzeczywiste algebr Liego: Niech $(\mathfrak{g}, [,])$ będzie algebrą Liego nad $\mathbb{R}$. Wtedy nawias $[,]$ jednoznacznie przedłuża się do zespolonego nawiasu Liego na kompleksyfikacji $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} = \mathfrak{g} + i\mathfrak{g}$ przestrzeni $\mathfrak{g}$ wzorem $[X' + iX'', Y' + iY''] = [X', Y'] - [X'', Y''] + i([X', Y''] + [X'', Y'])$. Przestrzeń $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ z tym nowym nawiasem nazywamy *kompleksyfikacją* algebry Liego $(\mathfrak{g}, [,])$.

Przykład: Algebry Liego $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}), \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}), \mathfrak{so}(n,\mathbb{C}), \mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$ są kompleksyfikacjami odpowiednich rzeczywistych algebr Liego $\mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}), \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}), \mathfrak{so}(n,\mathbb{R}), \mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$. Istotnie, jeśli $X = X' + iX'', Y = Y' + iY'' \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$, nawias $[X, Y]$ spełnia powyższy wzór.

Urzeczywistnieniem $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ zespolonej algebry Liego $\mathfrak{g}$ nazywamy tę algebrę rozumianą jako algebrę nad $\mathbb{R}$.

Lemat *1. Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego nad $\mathbb{R}$. Wtedy $B_{\mathfrak{g}}(X, Y) = B_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}}(X, Y)$ dla $X, Y \in \mathfrak{g}$.*

2. Niech $\mathfrak{h}$ będzie algebrą Liego nad $\mathbb{C}$. Wtedy $B_{\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}}(X, Y) = 2\,\mathrm{Re}\, B_{\mathfrak{h}}(X, Y)$ dla $X, Y \in \mathfrak{h}$.

Dowód: Punkt pierwszy jest oczywisty. Żeby dowieść drugi, zauważmy, że jeśli $L : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ jest operatorem $\mathbb{C}$-liniowym, a $P+iQ := [L]_e$ jest macierzą tego operatora w pewnej bazie $e = (e_1, \ldots, n)$, to macierz operatora $L_{\mathbb{R}}$ (czyli operatora rozumianego jako operator $\mathbb{R}$-liniowy) w bazie $(e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_n)$ jest równa

$$\begin{bmatrix} P & -Q \\ Q & P \end{bmatrix}.$$

Stąd $\mathrm{Tr}\, L_{\mathbb{R}} = 2\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\, L$. □

Ćwiczenie: Wywnioskuj z lematu, że: 1) $\mathfrak{g}$ jest półprosta wtedy i tylko wtedy gdy $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ jest półprosta; 2) $\mathfrak{h}$ jest półprosta wtedy i tylko wtedy gdy $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ jest półprosta.

Formą rzeczywistą zespolonej algebry Liego $\mathfrak{g}$ nazywamy taką rzeczywistą algebrę Liego $\mathfrak{h}$, że $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$. Równoważnie, forma rzeczywista jest podalgebrą algebry $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ taką, że $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{h} + i\mathfrak{h}$ (suma prosta przestrzeni wektorowych).

Rozważmy odwzorowanie $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ dane wzorem $X' + iX'' \mapsto X' - iX'', X', X'' \in \mathfrak{h}$. Ma ono następujące własności: 1) $\sigma^2 = \mathrm{Id}$; 2) jest antyliniowe; 3) $\sigma[X, Y] = [\sigma X, \sigma Y], X, Y \in \mathfrak{g}$.

Odwrotnie, każde takie odwzorowanie zadaje pewną formę rzeczywistą algebry Liego $\mathfrak{g}$. Istotnie, niech $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^\sigma = \{X \in \mathfrak{g} \mid \sigma(X) = X\}$. *Ćwiczenie:* Udowodnij, że $\mathfrak{h}$ jest podalgebrą w $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ oraz, że $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{h} + i\mathfrak{h}$.

Jedna algebra zespolona może mieć kilka *nie izomorficznych* form rzeczywistych.

Twierdzenie *Każda półprosta algebra Liego $\mathfrak{g}$ nad $\mathbb{C}$ ma* zwartą *formę rzeczywistą.*

Dowód: Wybierzmy $E_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$ tak, żeby $B_\mathfrak{g}(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1$. Wtedy mamy:

$$B(E_\alpha - E_{-\alpha}, E_\alpha - E_{-\alpha}) = -2, B(i(E_\alpha + E_{-\alpha}), i(E_\alpha + E_{-\alpha})) = -2$$

$$B(E_\alpha - E_{-\alpha}, i(E_\alpha + E_{-\alpha})) = 0, B(iH_\alpha, iH_\alpha) < 0.$$

Ostatnia nierówność wynika z lematu o formie rzeczywistej podalgebry Cartana. Niech

$$\mathfrak{g}_{zw} := \sum_{\alpha\in\Delta} \mathbb{R}(iH_\alpha) + \sum_{\alpha\in\Delta} \mathbb{R}(E_\alpha - E_{-\alpha}) + \sum_{\alpha\in\Delta} \mathbb{R}i(E_\alpha + E_{-\alpha}).$$

Żeby pokazać, że jest to podalgebra w $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ wystarczy dowieść, że jeśli $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Delta$, to współczynniki $N_{\alpha,\beta}$ określone przez $[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha,\beta}E_{\alpha+\beta}$ są rzeczywiste. Przyjmujemy to bez dowodu.

Lemat o formie Killinga formy rzeczywistej pokazuje, że $B_{\mathfrak{g}_{zw}}(X, Y) = B_\mathfrak{g}(X, Y), X, Y \in \mathfrak{h}$. Ostatnia forma jest ujemnie określona, co wynika z powyższych (nie)równości. □

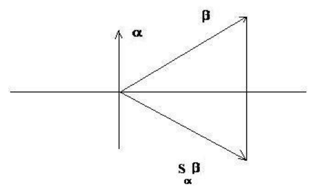
PRZYKŁAD: Niech $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, wtedy $\mathfrak{g}_{zw} = \sum_{j=1}^n R(i(E_{j,j} - E_{j+1,j+1})) + \sum_{j\neq k} \mathbb{R}(E_{jk} - E_{kj}) + \sum_{j\neq k} \mathbb{R}i(E_{jk} + E_{kj})$. Jeśli $A \in \mathfrak{g}_{zw}$, to $-\overline{A}^T = A$, czyli $\sigma(A) = -\overline{A}^T$. Macierze o własności $\sigma(A) = A$ nazywamy *skośnie unitarnymi*. Algebra Liego $\mathfrak{g}_{zw}$ oznacza się $\mathfrak{su}(n)$ i jest algebrą Liego specjalnej unitarnej grupy $SU(n) = \{a \in SL(n, \mathbb{C}) \mid a\bar{a}^T = I\}$.

Na zakończenie zauważmy, że odwzorowanie σ odpowiadające formie rzeczywistej $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ algebry Liego $\mathfrak{g}$ jest dane wzorem $\sigma(A) = \overline{A}$ oraz, że formy $\mathfrak{su}(n)$ i $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ nie są izomorficzne (jedna jest zwarta, druga nie).

12 Abstrakcyjne układy pierwiastków

Literatura dodatkowa: [Hel00]

Odbicie euklidesowej przestrzeni wektorowej $(V, (|))$ **wzdłuż wektora** $\alpha \in V, \alpha \neq 0$**:** Jest to przekształcenie ortogonalne zadane wzorem $s_\alpha \beta = \beta - a_{\beta,\alpha}\alpha$, gdzie $a_{\beta,\alpha} = 2(\beta|\alpha)/(\alpha|\alpha)$.



Układ pierwiastków w $(V, (|))$**:** Jest to skończony zbiór $R \subset V$ o własnościach:

1. R generuje V;

2. dla każdego $\alpha \in R$ odbicie s_α przestrzeni V wzdłuż α zachowuje R;

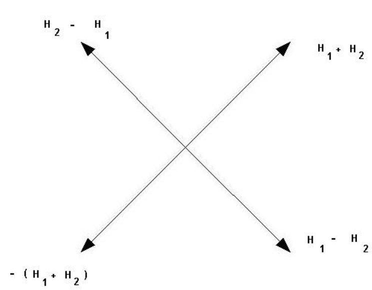
3. jedyne pierwiastki proporcjonalne do $\alpha \in R$ to $\alpha, 0, -\alpha$;

4. dla wszystkich $\alpha, \beta \in R$ liczby $a_{\beta,\alpha}$ określone wzorem $s_\alpha \beta = \beta - a_{\beta,\alpha}\alpha$ są *całkowite*.

Mówimy, że układ pierwiastków $R \subset V$ jest *nieprzywiedlny*, jeśli nie istnieje rozkładu $V = V_1 \oplus V_2$ w ortogonalną sumę prostą taką, że $R_1 := R \cap V_1$ oraz $R_2 := R \cap V_2$ są układami pierwiastów w V_1, V_2 odpowiednio i $R = R_1 \cup R_2$.

PRZYKŁAD: Zbiór wektorów pierwiastkowych $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) := \{H_\alpha \mid \alpha \in \Delta \cup \{0\}\} \subset \mathfrak{h}_\mathbb{R}$ półprostej zespolonej algebry Liego względem podalgebry Cartana $\mathfrak{h}$ jest układem pierwiastków. Istotnie, w lemacie z Wykładu 10 pokazaliśmy niezmienniczość $R \subset \mathfrak{h}$ względem odbić s_α w płaszczyznach $\alpha = 0, \alpha \in \Delta$. Odbicia te zadawane są wzorem $s_\alpha(H) = H - 2\frac{\alpha(H)}{\alpha(H_\alpha)} H_\alpha$, gdzie $-2\frac{\alpha(H)}{\alpha(H_\alpha)} = -2\frac{B_\mathfrak{g}(H_\alpha, H_\beta)}{B_\mathfrak{g}(H_\alpha, H_\alpha)} = p + q$ jest liczbą całkowitą. Spełnienie warunku 3. wynika z tegoż lematu.

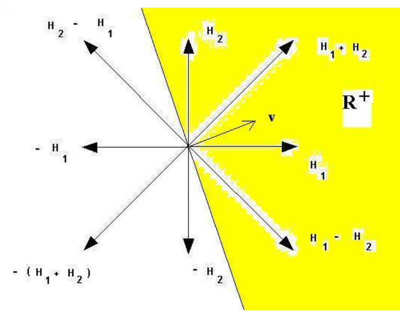
Układ pierwiastków algebry $\mathfrak{d}_2$



nie jest nieprzywiedlny. Układy w pozostałych przykładach ($\mathfrak{a}_n, \mathfrak{b}_n, \mathfrak{c}_n$ oraz $\mathfrak{d}_n, n > 2$) są.

Pierwiastki dodatnie i proste: Wybierzmy element $v \in V, v \neq 0$ taki, że $v^\perp \cap R = \{0\}$ (tutaj $v^\perp$ jest hiperpłaszczyzną prostopadłą do v; możemy wybrać takie v, bo R jest skończony). Zbiór pierwiastków leżących po tej samej stronie od $v^\perp$ co i v oznaczmy przez R^+. Będziemy je nazywać pierwiastkami *dodatnimi*. Pierwiastki ze zbioru $R^- := R \setminus (R^+ \cup \{0\})$ nazywamy *ujemnymi*. Mówimy, że $\alpha \in R^+$ jest pierwiastkiem *prostym*, jeśli on nie może być zapisany w postaci $\alpha = \beta + \gamma, \beta, \gamma \in R^+$.

PRZYKŁAD:



LEMAT *Niech α, β będą pierwiastkami prostymi, $\alpha \neq \beta$. Wtedy $(\alpha|\beta) \leq 0$.*

Dowód: Najpierw zauważmy, że $\gamma := \beta - \alpha \notin R$. Istotnie, gdyby $\gamma \in R^+$, to $\beta = \alpha + \gamma$ byłby sumą pierwiastków dodatnich, co jest sprzeczne z założeniem prostoty α. Podobnie, gdyby $\gamma \in R^-$, to $\alpha = \beta + (-\gamma)$ byłby sumą pierwiastków dodatnich.

Stąd wnioskujemy, że dla α-szeregu $\{\beta + n\alpha \mid p \leq n \leq q\}$, zawierającego β mamy $q = 0, p \geq 0$ (pojęcie α-szeregu dla abstrakcyjnych układów pierwiastków określa się analogicznie, jak dla układów $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ i ma analogiczne własności; w szczególności n przebiega *wszystkie* liczby całkowite pomiędzy p i q, oraz $-2(\beta|\alpha)/(\alpha|\alpha) = p + q$). Ostatecznie mamy $(\beta|\alpha) = -(1/2)(\alpha|\alpha)(p+q) \leq 0$. $\square$

Baza układu pierwiastków R: Jest to podzbiór $B \subset R$ o własnościach: 1) B jest bazą V; 2) każdy pierwiastek $\beta \in R$ może być zapisany w postaci $\beta = \sum_{\alpha \in R} n_\alpha \alpha$, gdzie n_α sa liczby całkowite tego samego znaku.

LEMAT *Każdy układ pierwiastków R posiada bazę.*

Dowód: Niech B będzie zbiorem pierwiastków prostych. Wtedy jest to układ liniowo niezależny. Istotnie, załóżmy przeciwne. Wtedy istnieją $x_i \neq 0, i \in I$, takie, że $\sum x_i \alpha_i = 0$ dla pewnych $\alpha_i \in B$. Podzielmy te współczynniki na dodatnie i ujemne: $I = I' \cup I'', x_i > 0, i \in I', x_j < 0, j \in I''$. Dla $\gamma := \sum_{i \in I'} x_i \alpha_i$ mamy $0 < (\gamma|\gamma) = \sum_{i \in I', j \in I''} x_i(-x_j)(\alpha_i|\alpha_j)$. Ostatnie wyrażenie jest ujemne według powyższego lematu, co daje sprzeczność.

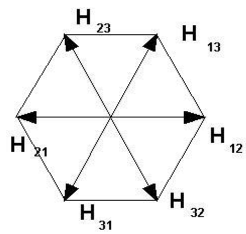
Teraz niech $\gamma \in R^+$. Jeśli γ nie jest prosty, możemy go rozłożyć: $\gamma = \alpha + \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$. Działając indukcyjnie, dojdziemy do rozkładu $\gamma = \sum_{\alpha \in B} n_\alpha \alpha, n_\alpha \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Jeśli $\gamma \in R^-$, to $-\gamma \in R^+$ i powtarzamy rozumowanie.

Jasne jest, że, ponieważ R generuje V, to i B też. $\square$

Macierz Cartana układu pierwiastków: Niech $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ będzie dowolną bazą R. *Macierzą Cartana* układu pierwiastków R związaną z B nazywamy macierz C o wyrazach $a_{ij} := a_{\alpha_i, \alpha_j}$.

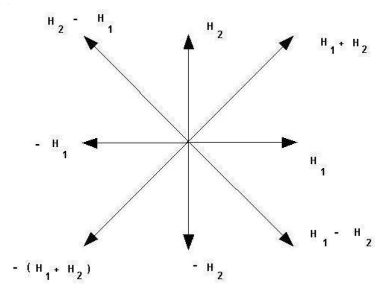
PRZYKŁAD: ($\mathfrak{a}_2$) Dla bazy $B = \{\alpha_1 = H_{12}, \alpha_2 = H_{23}\}$ mamy macierz

$$C = 2\begin{bmatrix} (\alpha_1|\alpha_1)/(\alpha_1|\alpha_1) & (\alpha_1|\alpha_2)/(\alpha_2|\alpha_2) \\ (\alpha_2|\alpha_1)/(\alpha_1|\alpha_1) & (\alpha_2|\alpha_2)/(\alpha_2|\alpha_2) \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & \frac{||\alpha_1||\cdot||\alpha_2||\cos(2\pi/3)}{||\alpha_2||^2} \\ \frac{||\alpha_2||\cdot||\alpha_1||\cos(2\pi/3)}{||\alpha_1||^2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$



PRZYKŁAD: ($\mathfrak{b}_2$) Dla bazy $B = \{\alpha_1 = H_1 - H_2, \alpha_2 = H_2\}$ mamy macierz

$$C = 2\begin{bmatrix} (\alpha_1|\alpha_1)/(\alpha_1|\alpha_1) & (\alpha_1|\alpha_2)/(\alpha_2|\alpha_2) \\ (\alpha_2|\alpha_1)/(\alpha_1|\alpha_1) & (\alpha_2|\alpha_2)/(\alpha_2|\alpha_2) \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & \frac{||\alpha_1||\cdot||\alpha_2||\cos(3\pi/3)}{||\alpha_2||^2} \\ \frac{||\alpha_2||\cdot||\alpha_1||\cos(3\pi/4)}{||\alpha_1||^2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$



Jak C i B wyznaczają R: Niech $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ oraz $C := ||a_{ij}||$. Każdy pierwiastek $\beta \in \mathbb{R}^+$ ma postać $\beta = \sum_i n_i\alpha_i$. Liczbę $\sum_i n_i$ nazywamy wysokością pierwiastka β. W szczególności pierwiastki wyskości 1 są elementami bazy B.

Według B i C budujemy wszystkie α_i-szeregi zawierające α_j:

$$\alpha_j, \alpha_j + \alpha_i, \ldots, \alpha_j + a_{ji}\alpha_i$$

(z dowodu pierwszego z powyższych lematów wiemy, że $\alpha_j - \alpha_i$ nie jest pierwiastkiem, więc $p = 0, q = a_{ji}$). W szczególności, otrzymujemy wszystkie pierwiastki wysokości 2: $\alpha = \alpha_j + \alpha_i$. Ponadto z C odczytujemy wartość $a_{\alpha,\alpha_k} = 2(\alpha|\alpha_k)/(\alpha_k|\alpha_k) = a_{jk} + a_{ik}$. W rezultacie mamy wszystkie α_k-szeregi zawierające α i zawierające się w R^+: $\alpha + p\alpha_k, \ldots, \alpha + q\alpha_k$, gdzie $p = 0$ (jeśli $k \notin \{i, j\}$) lub $p = -1$ (jeśli $k \in \{i, j\}$), a q wyznaczamy z równości $p + q = -a_{\alpha,\alpha_k}$. W ten sposób otrzymujemy wszystkie pierwiastki wysokości 3.

Iterując ten proces otrzymamy pierwiastki wszystkich wysokości. Trzeba tylko pokazać, że w układach pierwiastków „przyjmują się” wszystkie wysokości pomiędzy 1 a maksymalną. To przyjmujemy bez dowodu.

Przykład: Niech $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$. Wtedy mamy następujące α_i-szeregi zawierające α_i: 1) $\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2$; 2) $\alpha_2, \alpha_2 + \alpha_1$; 3) $\alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3$; 4) $\alpha_3, \alpha_3 + \alpha_2, \alpha_3 + 2\alpha_2$.

Otrzymaliśmy 2 pierwiastki wysokości 2. Rozważmy $\alpha := \alpha_1 + \alpha_2$, wtedy α_3-szereg zawierający α to $\alpha, \alpha + \alpha_3$, $(q = -a_{\alpha,\alpha_3} = -(a_{13} + a_{23}) = 1)$. Dla $\alpha = \alpha_2 + \alpha_3$ mamy α_1-szereg $\alpha, \alpha + \alpha_1$ $(q = -(a_{21} + a_{31}) = 1)$.

Otrzymaliśmy 2 pierwiastki wysokości 3. Niech $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$. Wtedy α_2-szereg zawierający α to $\alpha, \alpha + \alpha_2$ (bo $p = 0, q = -a_{\alpha,\alpha_2} - q = -(a_{12} + a_{22} + a_{32}) = 1$).

Niech $\alpha = \alpha_3 + 2\alpha_2$. Wtedy α_1-szereg zawierający α to $\alpha, \alpha + \alpha_1, \alpha + 2\alpha_1$ (bo $p = 0, q = -a_{\alpha,\alpha_1} - q = -(a_{31} + 2a_{21}) = 2$).

Ostatecznie, otrzymaliśmy następujący układ pierwiastków dodatnich: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 + 2\alpha_2, +\alpha_3$. Układ ten odpowiada algebrze $\mathfrak{c}_3$: wystarczy wziąć $\alpha_1 = H_1 - H_2, \alpha_2 = H_2 - H_3, \alpha_3 = 2H_3$.

Następne twierdzenie pokazuje, że rekonstruowanie układu R z B i C jest jednoznaczne.

Twierdzenie *Niech $R, R' \subset V'$ będą układami pierwiastków z bazami $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l,\} B' = \{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_l\}$. Oznaczmy $a_{ij} := a_{\alpha'_i,\alpha'_j}, a_{i'j'} := a_{\alpha'_i,\alpha'_j}$. Jeśli $a_{ij} = a_{i'j'}$, to odwzorowanie $\alpha_i \mapsto \alpha_{i'}$ przedłużone według liniowości na całe V (które oznaczamy przez ϕ) odwzorowuje bijektywnie V na V' oraz R na R'.*

Idea dowodu: Grupę Weyla układu pierwiastków R definiujemy jako podgrupę grupy izometrii przestrzeni V generowaną przez odbicia $s_\alpha, \alpha \in R$, i oznaczamy przez $W(R)$.

Dalej dowodzimy, że grupa Weyla tak naprawdę jest generowana przez „odbicia proste" $s_\alpha, \alpha \in B$, oraz że $W(R)B = R$.

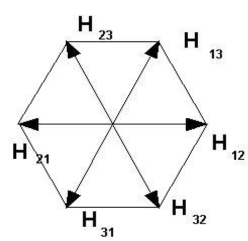
Warunek $a_{ij} = a_{i'j'}$ następnie implikuje, że ϕ „komutuje z odbiciami prostymi": $\phi \circ s_\alpha = s_{\alpha'} \circ \phi, \alpha \in B$, oraz ze wszystkimi: $\phi \circ s_\alpha = s_{\phi(\alpha)} \circ \phi, \alpha \in R$. To daje $\phi(R) = \phi(W(R)B) = W(R')\phi(B) = W(R')B' = R'$. $\square$

13 O klasyfikacji półprostych algebr Liego

Literatura dodatkowa: [Hel00]

Graf Coxetera i schemat Dynkina układu pierwiastków: Niech $C = ||c_{ij}||$ będzie macierzą Cartana układu pierwiastków R odpowiadającą bazie $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$. *Grafem Coxetera* układu R nazywamy graf o l wierzchołkach, przy czym wierzchołki i-ty i j-ty połączone są za pomocą $a_{ij}a_{ji}$ neprzecinających się odcinków. Jeśli nad i-tym wierzchołkiem dopiszemy jeszcze wielokrotność $(\alpha_i|\alpha_i)$ otrzymamy *diagram Dynkina.*

PRZYKŁAD: $(\mathfrak{a}_2)$

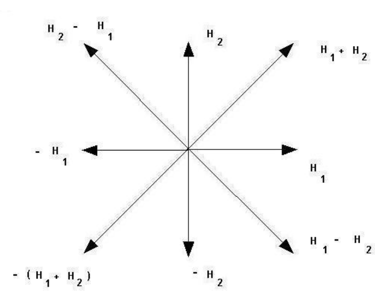


Dla bazy $B = \{\alpha_1 = H_{12}, \alpha_2 = H_{23}\}$ i macierzy

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

mamy

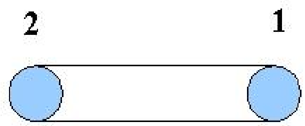
PRZYKŁAD: $(\mathfrak{b}_2)$



Dla bazy $B = \{\alpha_1 = H_1 - H_2, \alpha_2 = H_2\}$ i macierzy

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

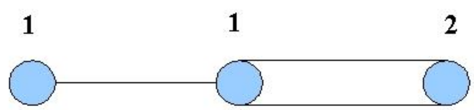
mamy



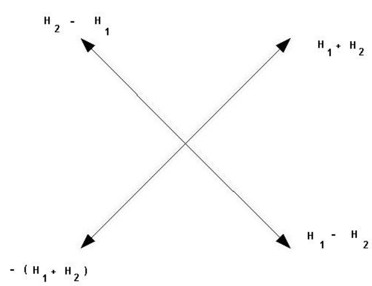
Przykład: $(\mathfrak{c}_3)$ Dla bazy $\alpha_1 = H_1 - H_2, \alpha_2 = H_2 - H_3, \alpha_3 = 2H_3$ i macierzy

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

mamy



Przykład: $(\mathfrak{d}_2)$



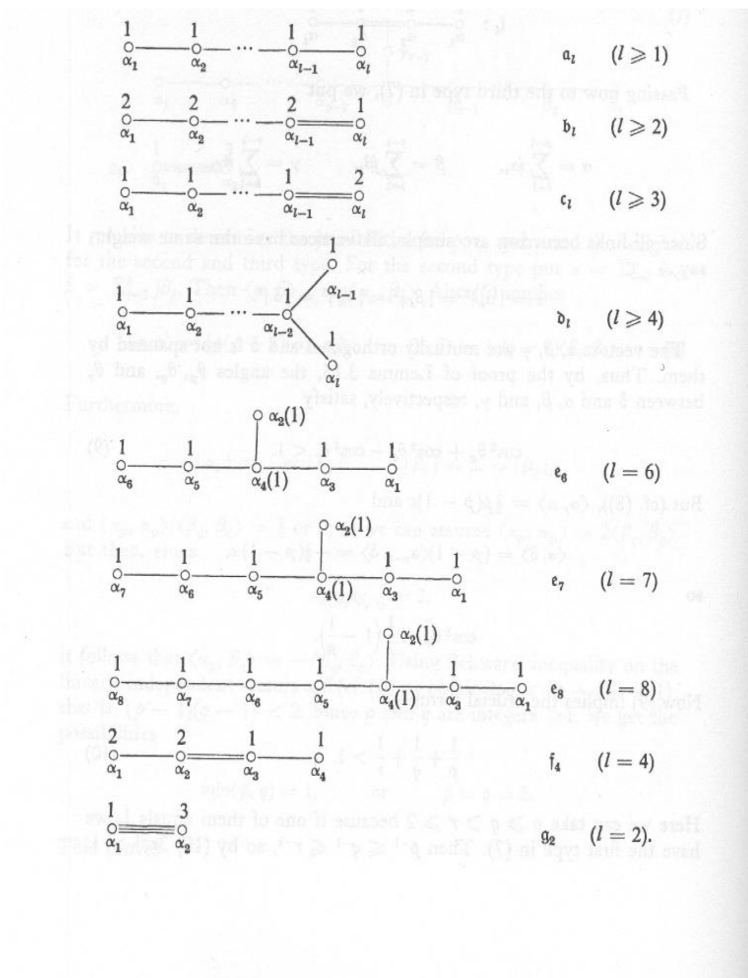
Dla bazy $\alpha_1 = H_1 + H_2, \alpha_2 = H_1 - H_2$ i macierzy

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

mamy

W ostatnim przykładzie otrzymaliśmy niespójny graf, co odzwierciedla przywiedlność odpowiedniego układu pierwiastków. W ogólności, nieprzywiedlnym układom pierwiastków odpowiadają spójne grafy Coxetera.

Klasyfikacja diagramów Dynkina: Poniżej przeliczone są wszystkie spójne diagramy Dynkina (listę tę przyjmujemy bez dowodu). Ponieważ diagram Dynkina w sposób jednoznaczny definiuje odpowiednią macierz Cartana, w ten sposób otrzymujemy klasyfikację nieprzywiedlnych układów pierwiastków.

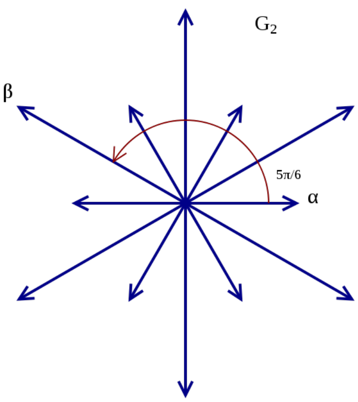


(Ilustracja z książki [Hel00].) Na liście tej znajdujemy 4 nieskończone serii diagramów odpowiadające układom pierwiastków, z którymi już jesteśmy zaznajomieni oraz pięć innych diagramów odpowiadających tzw. wyjątkowym układom pierwiastków. Wśród ostatnich przykładowo rozpatrzymy diagram

$\mathfrak{g}_2$. Odpowiednia macierz Cartana ma postać

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

a układ pierwiastków wygląda następująco:



(ilustracja z Wikipedii).

Macierz Cartana a generatory kanoniczne półprostej algebry Liego:

TWIERDZENIE *Niech $\mathfrak{g}$ będzie półprostą algebrą Liego nad $\mathbb{C}$, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ jej podalgebrą Cartana, a $C = ||a_{ij}||$ macierzą Cartana odpowiadająca pewnej bazie $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ układu pierwiastków $R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. Wtedy istnieją elementy $X_i, Y_i, H_i \in \mathfrak{g}, i = 1, \dots, l$, o własnościach:*

1. $[H_i, H_j] = 0$;
2. $[X_i, Y_i] = H_i$;
3. $[X_i, Y_j] = 0$, *jeśli* $i \neq j$;
4. $[H_i, X_j = a_{ji}X_j, [H_i, Y_i] = -a_{ij}Y_j$;
5. $(\mathrm{ad}_{X_i})^{1-a_{ij}}X_j = 0, i \neq j$;
6. $(\mathrm{ad}_{Y_i})^{1-a_{ij}}Y_j = 0, i \neq j$;
7. *elementy X_i, Y_i, H_i generują $\mathfrak{g}$ (czyli każdy element z $\mathfrak{g}$ jest kombinacją liniową wielokrotnych nawiasów tych elementów).*

Dowód: Przypomnijmy, że dla $\alpha, \beta \in \Delta$ mamy

$$[g^{\alpha}, \mathfrak{g}^{\beta}] = \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}, \text{ jeśli } \alpha + \beta \in \Delta \cup \{0\} \tag{4}$$

(lub $= 0$, w przeciwnym wypadku). Niech $H_i := (2/(\alpha_i|\alpha_i))H_{\alpha_i}, X_i$ będzie dowolnym niezerowym wektorem z $\mathfrak{g}^{\alpha_i}$, a $Y_i \in g^{-\alpha_i}$ dobierzemy tak, żeby $B_{\mathfrak{g}}(X_i, Y_i) = (2/(\alpha_i|\alpha_i))$. Wtedy relacje 1,2 są oczywiste, relacja 3 wynika z faktu, że $\alpha_i - \alpha_j$ nie jest pierwiastkiem (zob. dowód jednego z lematów w Wykładzie 12). Relacje 4 wynikają z tego, że $[H, X_j] = \alpha_j(H)X_j$ dla $H \in \mathfrak{h}$ oraz

$\alpha_j(H_i) = (2/(\alpha_i|\alpha_i))(\alpha_j|\alpha_j) = a_{ji}$. Relacje 5 i 6 są wnioskiem faktu, że α_i szereg zawierający α_j ma postać $\alpha_j, \alpha_j + \alpha_i, \ldots, \alpha_j - a_{ji}\alpha_i$, czyli $\alpha_j + (1 - a_{ji})\alpha_i$ nie jest pierwiastkiem. Ostatni punkt wynika z tego, że H_i tworzą bazę $\mathfrak{h}$ oraz z równości (4) (z uwzględnieniem faktu, że każdy pierwiastek jest kombinacją bazowych). $\square$

Klasyfikacja półprostych zespolonych algebr Liego:

TWIERDZENIE *Niech R będzie układem pierwiastków. Wtedy istnieje zespolona półprosta algebra Liego $\mathfrak{g}$ oraz podalgebra Cartana $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ takie, że $R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.*

Idea dowodu: Niech $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ będzie bazą układu R, a $C = ||a_{ij}||, a_{ij} = a_{\alpha_i\alpha_j}$ odpowiednią macierzą Cartana. Dowód twierdzenia z grubsza polega na zbudowaniu algebry Liego generowanej przez elementy $X_i, Y_i, H_i \in \mathfrak{g}, i = 1, \ldots, l$, podlegające relacjom z poprzedniego twierdzenia. $\square$

14 Elementy teorii reprezentacji półprostych algebr Liego

Literatura dodatkowa: [FH91, KS10]

Reprezentacja algebry Liego $\mathfrak{g}$ w przestrzeni wektorowej V: Jest to homomorfizm algebr Liego $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$, gdzie przestrzeń $\mathrm{End}(V)$ jest wyposażona w komutator. Reprezentację ρ nazywamy *nieprzywiedlną*, jeśli nie istnieje nietrywialnej (różnej od $\{0\}$ i V) podprzestrzeni niezmienniczej $W \subset V$ (czyli takiej, że $\rho(X)W \subset W$ dla każdego $X \in \mathfrak{g}$).

Twierdzenie *Niech $\mathfrak{g}$ będzie półprostą zespoloną algebrą Liego, a ρ jej dowolną skończenie wymiarową ($\dim V < \infty$) reprezentacją. wtedy ρ jest* zupełnie przywiedlna*, czyli dla każdej podprzestrzeni niezmienniczej $W \subset V$ istnieje dopełniająca podprzestrzeń niezmiennicza $W' \subset V, V = W \oplus W'$.*

Bez dowodu. (Jeden ze sposobów dowodu wykorzystuje tzw. sztuczkę unitarną Weyla: korzystamy z tego, że $\mathfrak{g}$ posiada zwartą formę rzeczywistą. Reprezentacje zwartej algebry (grupy) Liego są zupełnie przywiedlne z powodu istnienia niezmienniczego iloczynu skalarnego na V.)

Dalej rozważamy tylko *półproste* algebry Liego $\mathfrak{g}$ nad $\mathbb{C}$ oraz reprezentacje skończenie wymiarowe. Z twierdzenia wynika, że każda taka reprezentacja rozkłada się w sumę prostą reprezentacji nieprzywiedlnych.

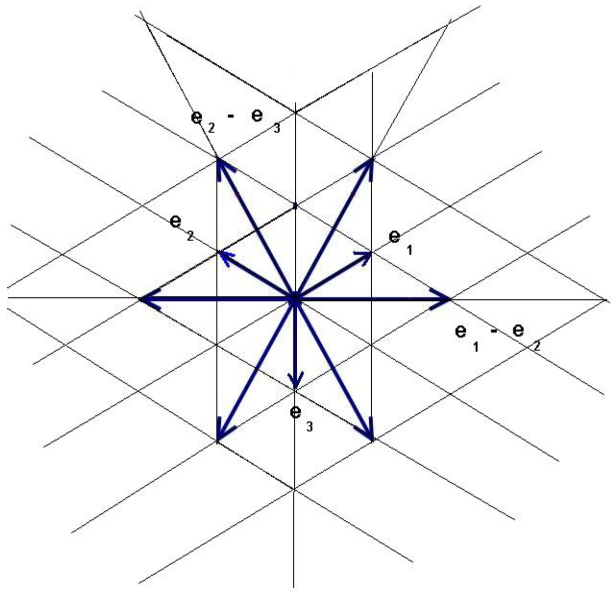
Waga reprezentacji ρ: Niech $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ będzie podalgebrą Cartana w $\mathfrak{g}$. Niech $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, oznaczmy

$$V^\alpha := \{v \in V \mid \rho(H)v = \alpha(H)v \ \forall H \in \mathfrak{h}\}.$$

Funkcjonał α nazywamy wagą, jeśli $V^\alpha \neq \{0\}$ (podprzestrzeń V^α nazywamy *podprzestrzenią wagową* odpowiadającą α).

Przykład: Już poznaliśmy reprezentację dołączoną $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g}), \mathrm{ad}_X Y := [X, Y]$. Jej wagami są pierwiastki algebry Liego $\mathfrak{g}$, a popdprzestrzenie pierwiastkowe $\mathfrak{g}^\alpha$ są podprzestrzeniami wagowymi.

Przykład: Niech $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$, a $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathbb{C}^3)$ będzie naturalną reprezentacją (macierz działa na wektor-kolumnę). Mamy $H\mathbf{e}_i = e_i(H)\mathbf{e}_i, i = 1, 2, 3$, tutaj $H \in \mathfrak{h}, e_i(H)$ oznacza i-ty element diagonalny macierzy H a $\mathbf{e}_i$ są wektorami bazy kanonicznej $\mathbb{C}^3$. Stąd podprzestrzenie $\langle \mathbf{e}_i \rangle$ są wagowymi odpowiadającymi wagom e_i. Poniższy rysunek przedstawia wagi wraz z pierwiastkami.



Ćwiczenie: 1) Udowodnij, że dla dowolnego pierwiastka α oraz wagi β mamy $\rho(\mathfrak{g}^\alpha)V^\beta \subset V^{\alpha+\beta}$, jeśli $\alpha+\beta$ jest wagą, i $\rho(\mathfrak{g}^\alpha)V^\beta = \{0\}$ w przeciwnym przypadku. 2) Pokaż, że dla reprezentacji nieprzywiedlnej dwie dowolne wagi niezerowe różnią się o kombinację liniowa pierwiastków o współczynnikach całkowitych. *Wskazówka:* dla wagi α rozważ podprzestrzeń $W = \bigoplus_{\beta\in\Lambda_R} V^{\alpha+\beta}$, gdzie Λ_R jest *kratą* generowaną przez pierwiastki, czyli zbiorem wszystkich kombinacji liniowych pierwiastków o współczynnikach całkowitych.

Reprezentacje $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$: Niech $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}), H := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, E_+ := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_- := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Wtedy $[H, E_\pm] = \pm 2E_\pm, [E_+, E_-] = H$. Rozważmy nieprzywiedlną reprezentację $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$, gdzie V jest skończenie wymiarową (nad $\mathbb{C}$). Operator $\rho(H)$ ma wektor własny: $\rho(H)v = \lambda v$. Ponadto $\rho(H)\rho(E_+)v = (\rho(E_+)\rho(H) + 2\rho(E_+))v = (\lambda+2)\rho(E_+)v$, czyli $\rho(E_+)v$ jest wektorem własnym dla $\rho(H)$ odpowiadającym wartości własnej $\lambda+2$. Iterując dostajemy ciąg wektorów własnych o różnych wartościach własnych $\lambda, \lambda+2, \lambda+4, \ldots$, który musi się skończyć wektorem zerowym (bo $\dim V < \infty$). Stąd istnieje wektor własny v_0 dla $\rho(H)$ odpowiadający wartości własnej λ_0 o własności $\rho(E_+)v_0 = 0$.

Podobnie $\rho(H)\rho(E_-)v = (\lambda-2)\rho(E_-)v$ dla dowolnego wektora własnego o wartości własnej λ. W szczególności dla $v_k := \rho(E_-)^k v_0$ mamy $\rho(H)v_k = (\lambda_0 - 2k)v_k$, co oznacza, że ciąg v_k musi się oberwać: istnieje n takie, że $v_0 \neq 0, \ldots, v_n \neq 0, v_{n+1} = 0$.

Lemat *Dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ ma miejsce równość*

$$\rho(E_+)v_k = k(\lambda_0 - k + 1)v_{k-1}.$$

W szczególności, ponieważ $0 = \rho(E_+)v_{n+1} = (n+1)(\lambda_0 - (n+1) + 1)v_n$, mamy $\lambda_0 = n$.

Dowód: Dla $k = 1$ mamy $\rho(E_+)v_1 = \rho(E_+)\rho(E_-)v_0 = \rho(H)v_0 = \lambda_0 v_0$. Zakładając, że równość jest spełniona dla $n = k$, mamy (przypomnijmy, że $v_{k+1} = \rho(E_-)v_k$):

$$\rho(E_+)v_{k+1} = \rho(E_+)\rho(E_-)v_k = (\rho(E_-)\rho(E_+) + \rho(H))v_k = \rho(E_-)k(\lambda_0 - k + 1)v_{k-1} + (\lambda_0 - 2k)v_k =$$

$$(k(\lambda_0 - k + 1) + (\lambda_0 - 2k))v_k = (k+1)(\lambda_0 - k)v_k.$$

□

Zauważmy teraz, że podprzestrzeń rozpięta przez wektory $v_0, \ldots, v_n$ jest niezmiennicza, musi więc pokrywać się z V. Otrzymaliśmy w ten sposób nieskończoną serię reprezentacji indeksowanych przez $n \in \mathbb{N}$. Przestrzeń $V^{(n)}$ jest rozpięta przez $v_0, \ldots, v_n$, a operatory reprezentacji są dane przez

$$\begin{aligned}
\rho^{(n)}(H)v_k &= (n-2k)v_k, \\
\rho^{(n)}(E_-)v_k &= v_{k+1}, \\
\rho^{(n)}(E_+)v_k &= k(n-k+1)v_{k-1}.
\end{aligned}$$

Podsumowując otrzymujemy

TWIERDZENIE *Każda nieprzywiedlna reprezentacja algebry $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ jest postaci $\rho^{(n)}$ dla pewnego n.*

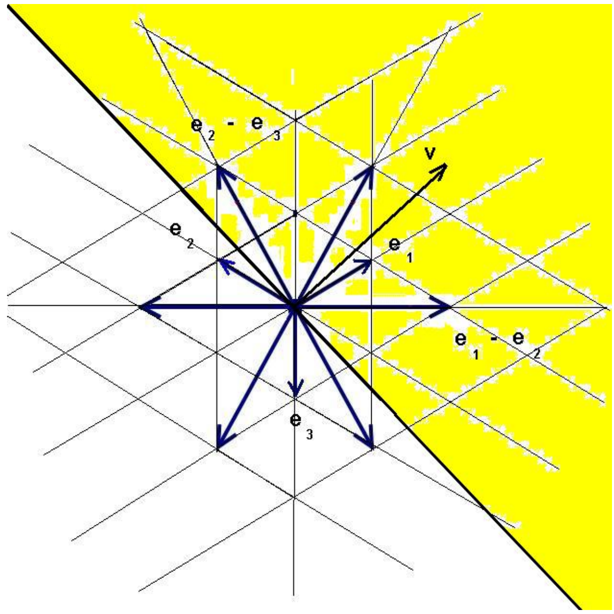
$\mathfrak{sl}(2)$-trójki oraz krata wagowa Λ_W: Niech teraz $\mathfrak{g}$ będzie dowolną (półprostą) algebrą Liego. Dla $\alpha \in \Delta$ rozważmy podprzestrzeń S_α w $\mathfrak{g}$ rozpiętą przez podprzestrzenie $\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}, [\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}]$. Jest oczywistym, że jest to podalgebra Liego w $\mathfrak{g}$. Ponadto, łatwo wybrać generatory $E_+ \in \mathfrak{g}^\alpha, E_- \in \mathfrak{g}^{-\alpha}, H'_\alpha \in [\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}]$ spełniające relacje komutacyjne algebry $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Wystarczy wybrać H'_α proporcjonalnie do wektora pierwiastkowego H_α tak, żeby $\alpha(H'_\alpha) = B_\mathfrak{g}(H_\alpha, H'_\alpha) = 2$, wziąć E_+ niezerowe, a E_- wybrać tak, żeby $B_\mathfrak{g}(E_+, E_-) = 2/B_\mathfrak{g}(H_\alpha, H_\alpha)$ (przypomnijmy, ze $[E_+, E_-] = B_\mathfrak{g}(E_+, E_-)H_\alpha$).

Powyższa analiza reprezentacji $\mathfrak{sl}(2)$ pokazuje, że wagi dowolnej reprezentacji nieprzywiedlnej (więc i każdej reprezentacji) przyjmują *całkowite* wartości na wektorach H'_α. W szczególności można traktowac wagi jako elementy z $\mathfrak{h}^*_\mathbb{R}$. Zbiór wszystkich funkcjonałów z $\mathfrak{h}^*_\mathbb{R}$ przyjmujących wartości całkowite na wektorach $H'_\alpha, \alpha \in \Delta$, nazywamy kratą wagową i oznaczamy przez Λ_W. Zauważmy, że $\Lambda_W \supset \Lambda_R$ (jeżeli traktujemy pierwiastki i ich krotności jako elementy z $\mathfrak{h}^*_\mathbb{R}$).

Niezmienniczość Λ_W względem grupy Weyla $W(R)$: Dowodzi się analogicznie jak niezmienniczośc układu pierwiastków Δ, czyli używa się przy tym α-szeregów zawierających β, gdzie β jest wagą, a α pierwiastkiem (por. Wyklad 10).

Najwyższa waga reprezentacji: Ustalmy wektor niezerowy $v \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}$ nie należący do żadnej z hiperpłaszczyzn $\alpha^\perp$ (por. Wykład 12). Dla reprezentacji ρ *wagą najwyższą* nazwiemy wagę β, która przyjmuje największą wartość na wektorze v. Odpowiedni wektor własny $w \in V, \rho(H)w = \beta(H)w, H \in \mathfrak{h}$ nazywamy *najwyższym wektorem wagowym.*

PRSZYKŁAD: Dla poniższego wyboru wektora v najwyższą wagą reprezentacji dołączonej będzie $e_1 - e_3$, a najwyższą wagą reprezentacji naturalnej będzie e_1.



TWIERDZENIE *1. Dla dowolnej reprezentacji ρ istnieje waga najwyższa β.*

2. *Odpowiedni najwyższy wektor wagowy w zeruje się przez wszystkie operatory $\rho(\mathfrak{g}^{\alpha}), \alpha \in R^{+}$ (tutaj R^{+} jest zbiorem pierwiastków dodatnich, związanych z wyborem v).*

3. *Podprzestrzeń $W \subset V$ generowana przez wielokrotne zastosowanie operatorów $\rho(\mathfrak{g}^{\alpha}), \alpha \in R^{-}$, do w jest nieprzywiedlna.*

4. *Każda reprezentacja nieprzywiedlna posiada jedyny (z dokładnością do proporcjonalności) najwyższy wektor wagowy.*

PRZYKŁAD: Dla reprezentacji $\rho^{(n)}$ wagami są $\{n, n-2, \ldots, -n\}$. Najwyższa waga to n, a najwyższy wektor wagowy to v_0.

Dowód twierdzenia: Punkt pierwszy jest oczywisty: ilość wag jest skończona. Punkt 2 wynika z tego, że $(\beta+\alpha)(v) > \beta(\alpha)$ dla $\alpha \in R^{+}$, więc $\beta+\alpha$ nie może być wagą. Punkt 3 dowodzi się analogicznie do przypadku algebry $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Punkt 4: gdyby było dwie różne wagi najwyższe β, β', musiałyby się różnić o kombinację liniową o współczynnikach z $\mathbb{N}$ pierwiastków z R^{-}. Wtedy $\beta(v) > \beta'(v)$ lub $\beta'(v) > \beta(v)$. $\square$

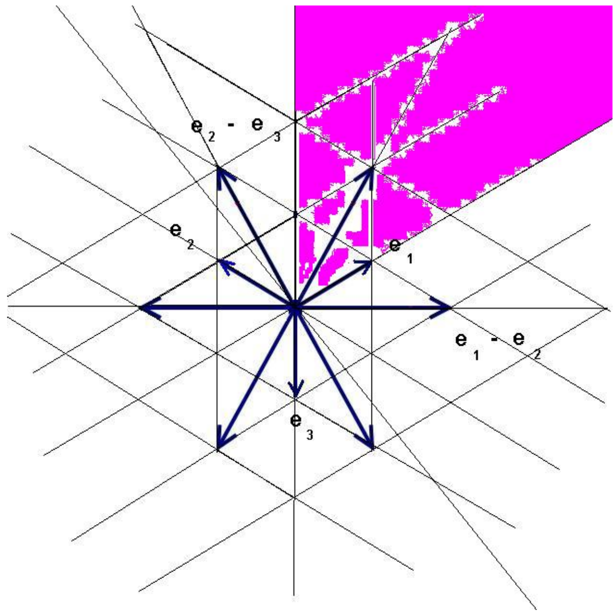
Waga najwyższa i inne wagi reprezentacji: Niech ρ będzie reprezentacją nieprzywiedlną $\alpha \in \mathfrak{h}_R^*$ jej wagą najwyższą. Oznaczmy przez $W(R)\alpha$ orbitę α pod działaniem grupy Weyla, a przez $conv(W(R)\alpha)$ jej powłokę wypukłą.

PRZYKŁAD: Dla reprezentacji dołączonej $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ mamy $W(R)\alpha = \Delta$, a dla reprezentacji naturalnej $W(R)\alpha = \{e_1, e_2, e_3\}$.

TWIERDZENIE *Zbiór wag reprezentacji ρ jest równy $conv(W(R)\alpha) \cap (\lambda + \Lambda_R)$.*

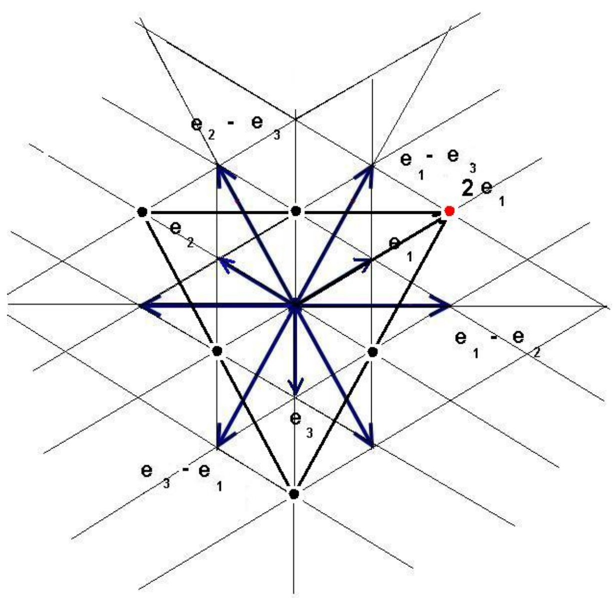
Bez dowodu.

Klasyfikacja reprezentacji nieprzywiedlnych: *Komórką Weyla C* nazywamy domknięcie składowej spójnej zbioru $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* \setminus \bigcup_{\alpha \in \Delta} \alpha^{\perp}$. Komórkę Weyla o tej własności, że $c(H_\alpha) > 0$ dla wszystkich $c \in C, \alpha \in R^+$, nazywamy *dodatnią* (innymi słowy jest to taka komórka Weyla, której elementy tworzą kąt ostry lub prosty ze wszystkimi pierwiastkami dodatnimi). Na rysunku poniżej mamy przykład dodatniej komórki Weyla.



TWIERDZENIE *Ustalmy dodatnią komórkę Weyla C. Każdy element α z $C \cap \Lambda_W$ jest wagą najwyższą pewnej reprezentacji nieprzywiedlnej ρ_α.*

PRZYKŁAD: Niech $\alpha := 2e_1$.



Wtedy $W(R)\alpha = \{\alpha, 2e_2 = \alpha + 2(e_2 - e_1), 2e_3 = \alpha + 2(e_3 - e_1)\}$, $conv(W(R)\alpha)$ jest trójkątem rozpiętym przez te punkty. Przesuwając α o krotności pierwiastków wewnątrz tego trójkąta znajdziemy jeszcze trzy wagi: $-e_1 = \alpha + 2(e_2 - e_1) + (e_3 - e_2), -e_2 = \alpha + (e_3 - e_1), -e_3 = \alpha + (e_2 - e_1)$. Przestrzeń reprezentacji ρ_α będzie 6-wymiarowa generowana przez najwyższy wektor wagowy $w_1 := w$ oraz wektory $w_2 := \rho_\alpha(E_{31})w, w_3 := \rho_\alpha(E_{31})^2 w, w_4 := \rho_\alpha(E_{21})w, w_5 := \rho_\alpha(E_{21})^2 w, w_6 := \rho_\alpha(E_{23})\rho_\alpha(E_{21})^2 w$.

Ćwiczenie: Znajdź działanie wszystkich operatorów reprezentacji ρ_α na wektory $w_1, \ldots, w_6$. *Wskazówka:* skorzystaj z relacji komutacyjnych algebry $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ oraz z punktu 2 twierdzenia o najwyższym wektorze wagowym.

Literatura

[Ada69] J. Frank Adams, *Lectures on Lie groups*, Benjamin, 1969.

[DK00] J. Duistermaat and J. Kolk, *Lie groups, Universitext*, Springer, 2000.

[FH91] William Fulton and Joe Harris, *Representation theory*, Springer, 1991.

[Hel00] Sigudur Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, AMS, 2000.

[KS10] Yvette Kosmann-Schwarzbach, *Groups and symmetries*, Springer, 2010, Translated from French.

[Pos86] Mikhail Postnikov, *Lectures in geometry: Lie groups and Lie algebras. Semester 5.*, Mir, 1986.

[Tra] Andrzej Trautman, *Grupy oraz ich reprezentacje*, Skrypt do wykładu, dostępne na http://www.fuw.edu.pl/∼amt.

[Woj86] Wojciech Wojtyński, *Grupy i algebry Liego*, PWN, 1986.