Teoria grup I

Wykład 1

1 Wprowadzenie do wykładu, cz. I

Grupa: Zbiór G wyposażony w "działanie" $\mu : G \times G \to G$ (skrótowo oznaczamy $\mu(a,b) =: a \cdot b$ lub poprostu ab) spełniające następujące aksjomaty:

1. działanie jest łączne, czyli
$$(ab)c = a(bc) \ \ \forall\ a,b,c \in G;$$
2. istnieje element $e \in G$, zwany "neutralnym", taki, że
$$ea = ae = a \ \ \forall\ a \in G;$$
3. dla każdego $a \in G$ istnieje element "odwrotny" a^{-1}, czyli taki, że
$$aa^{-1} = a^{-1}a = e.$$

Uwaga: Element neutralny jest jedyny: jeśli e' inny neutralny, to $e' = e'e = e$. Analogicznie, dla każdego $a \in G$ element odwrotny a^{-1} jest wyznaczony jednoznacznie.

Podgrupa grupy G: Podzbiór $H \subset G$ o własnościach 1) $\mu(H,H) \subset H$ oraz 2) $H^{-1} \subset H$, czyli

$$1)\ ab \in H \ \ \forall\ a,b \in H \text{ oraz } \ 2)\ a^{-1} \in H \ \ \forall\ a \in H.$$

Uwaga: 1) i 2) implikują $e \in H$ oraz fakt, że podgrupa H sama staje się grupą z działaniem $\mu|_{H\times H}$.

Przykład podstawowy - grupa permutacji: Permutacją zbioru X nazywamy bijekcję $a : X \to X$. Zbiór bijekcji oznaczamy S_X (S od „symetrii", grupę permutacji inaczej nazywamy „grupą symetrii" zbioru X) i wyposażamy w działanie - złożenie bijekcji, czyli $\mu(a,b) := a \circ b : X \to X$. Element neutralny - odwzorowanie identycznościowe Id_X, element odwrotny do a - odwzorowanie odwrotne $a^{-1} : X \to X$.

Inne przykłady: Wszystkie inne przykłady grup to podgrupy grupy S_X (:-o, na serio: jest to treść twierdzenia Cayley'a).

Przykłady bardziej przyziemne:

1. $G = \{*\}$ grupa jednoelementowa.
2. $(\mathbb{Z},+), (\mathbb{R},+), (\mathbb{C},+), (\mathbb{Z}^n,+), (\mathbb{R}^n,+), (\mathbb{C}^n,+)$; przy tym mamy ciągi podgrup: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}, \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$.

3. $(\mathbb{R}_{\neq 0}, \cdot), (\mathbb{R}_{>0}, \cdot), (\mathbb{C}_{\neq 0}, \cdot)$; ciąg podgrup $\mathbb{R}_{>0} \subset \mathbb{R}_{\neq 0} \subset \mathbb{C}_{\neq 0}$.
4. $U(1) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ (podgrupa $\mathbb{C}_{\neq 0}$).
5. S_n, grupa permutacji zbioru n-elementowego.

Uwaga: 1.- 4. są przykładami grup *przemiennych* lub *abelowych*, czyli takich, że

$$\mu(a, b) = \mu(b, a) \ \ \forall\, a, b \in G.$$

3. jest przykładem grupy nieprzemiennej, jeśli $n > 2$.

Przykłady mniej przyziemne otrzymują się w ramach następującej *ważnej* konstrukcji. Załóżmy, że zbiór X wyposażony jest w pewną "strukturę" $\mathfrak{S}$. Wybierzmy z S_X tylko bijekcje o tej własności, że one same i ich odwrotności "zachowują" $\mathfrak{S}$, i oznaczmy przez $S_{X,\mathfrak{S}}$ ich zbiór. Wtedy $S_{X,\mathfrak{S}}$ jest podgrupą w S_X. Grupa $S_{X,\mathfrak{S}}$ jest „grupą symetrii" struktury $\mathfrak{S}$ i często zawiera istotną informację o $\mathfrak{S}$ (zob. przykład „podłogi", poniżej).

Przykład: $\mathfrak{S}$ struktura przestrzeni liniowej na X, wtedy zachowanie struktury oznacza liniowość bijekcji, $S_{X,\mathfrak{S}} = GL(X)$ (od angielskiego *general linear*) grupa odwracalnych liniowych przekształceń przestrzeni X.

Przykład: $\mathfrak{S}$ struktura przestrzeni liniowej na X wraz z formą objętości σ, $S_{X,\mathfrak{S}} = SL(X)$ (od angielskiego *special linear*) grupa odwracalnych liniowych przekształceń przestrzeni X zachowujących σ. *Uwaga:* $SL(X)$ jest podgrupą $GL(X)$.

Przykład: $\mathfrak{S}$ struktura przestrzeni euklidesowej na X, czyli X jest przestrzenią liniową z zadaną metryką euklidesową $(|)$, $S_{X,\mathfrak{S}} = O(X)$ grupa ortogonalna, czyli grupa liniowych bijekcji, zachowujących metrykę. *Uwaga:* $O(X)$ jest podgrupą $GL(X)$.

Przykład: $SO(X) := SL(X) \cap O(X)$.

Przykład: Niech $X = \mathbb{R}^4$ będzie wyposażone w strukturę metryki $(|)$ o sygnaturze $(1, 3)$, czyli $\mathfrak{S}$ będzie strukturą lorentzowską na X. Wtedy $S_{X,\mathfrak{S}} = O(1, 3)$, grupa liniowych bijekcji zachowujących $(|)$, jest tzw. grupą Lorentza.

Przykład: $\mathfrak{S}$ struktura przestrzeni metrycznej lub topologicznej na X, zachowanie struktury oznacza ciągłość bijekcji, $S_{X,\mathfrak{S}}$ grupa homeomorfizmów przestrzeni X.

Przykład: $\mathfrak{S}$ struktura rozmaitości gładkiej na X, zachowanie struktury oznacza gładkość bijekcji, $S_{X,\mathfrak{S}}$ grupa dyfeomorfizmów przestrzeni X.

Działanie (lewe) grupy G na zbiorze X: Odwzorowanie $\nu : G \times X \to X$ (skrótowo oznaczamy też $\nu(g, x) =: g \cdot x$) o własnościach

1. $(g_1 \cdot g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x) \ \ \forall\, g_1, g_2 \in G, x \in X$;
2. $e \cdot x = x \ \ \forall\, x \in X$.

Przykład: Działanie grupowe $\mu : G \times G \to G$ jest przykładem lewego (oraz prawego) działania G na G.

Przykład: Grupa S_X w naturalny sposób działa na X: $a \cdot x := a(x), a \in S_X, x \in X$. *Uwaga:* jest to *lewe* działanie: $(a \cdot b) \cdot x = (a \circ b)(x) = a(b(x)) = a \cdot (b \cdot x)$.

Przykład: Analogicznie, $S_{X,\mathfrak{S}}$ działa na X.

Orbita elementa $x \in X$ działania G na X: $G \cdot x := \{g \cdot x \mid g \in G\}$.

Uwaga: X jest sumą rozłączną orbit działania. Rzeczywiście, każdy element zawiera się w jakiejś orbicie (bo $e \cdot x = x$), ponadto, jeśli $x \in G \cdot x'$ oraz $x \in G \cdot x''$, to $G \cdot x' = G \cdot x''$ (bo $x = g' \cdot x' = g'' \cdot x'' \Longrightarrow x' = (g')^{-1} \cdot g'' \cdot x'' \Longrightarrow g \cdot x' = g \cdot (g')^{-1} \cdot g'' \cdot x'' \Longrightarrow G \cdot x' \subset G \cdot x''$ i odwrotnie).

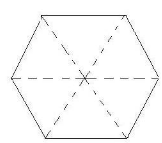
Stabilizator G^x elementa $x \in X$ względem działania G na X: $G^x := \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$.

Uwaga 1. Stabilizator jest podgrupą: $g_1 \cdot x = x, g_2 \cdot x = x \Longrightarrow (g_1 \cdot g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = g_1 \cdot x = x$ oraz $g \cdot x = x \Longrightarrow x = g^{-1} \cdot g \cdot x = g^{-1} \cdot x$.

Uwaga 2. Stabilizatory elementów z jednej orbity są sprzężone: $x' = h \cdot x \Longrightarrow G^x = h^{-1} G^{x'} h$ (*Ćwiczenie*).

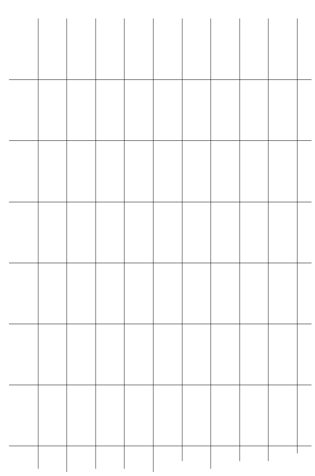
Stabilizator G^Y podzbioru $Y \subset X$ względem działania G na X: $G^Y := \{g \in G \mid g \cdot Y \subset Y\}$.

Przykład: Grupa D_n symetrii wielokąta prawidłowego o n wierzchołkach. Niech $X = \mathbb{R}^2$ ze standardową metryką euklidesową, Y n-kąt prawidłowy o środku w zerze:



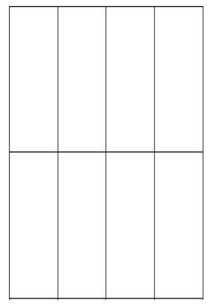
Wtedy D_n jest podgrupą grupy $O(X)$ będąca stabilizatorem Y.

Przykład: Grupa G symetrii „podłogi", składa się z: 1)„kraty" $\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$; 2) odbić względem prostych poziomych i pionowych, przechodzących przez węzły kraty oraz przez środki „płytek"; 3) obrotów o $180°$ względem węzłów kraty oraz punktów leżących w środkach płytek oraz ich krawędzi.



Grupa G działa na $\mathbb{R}^2$. Orbita zera: $\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$. Ona nie pokrywa się z „podłogą” (bo nie zawiera „fugi”), ale dobrze odzwierciedla nierównoprawność poziomego i pionowego kierunku. Czyli znając samą tylko grupę symetrii obiektu czasem (nie zawsze, zob. następny przykład) możemy w dużej mierze odtworzyć strukturę obiektu.

Przykład: Grupa G symetrii „kawałka podłogi”



jest o wiele biedniejsza, ma tylko 3 nietrywialne elementy: odbicia względem prostych pionowej i poziomej przechodzących przez środek „kawałka” oraz ich złożenie, czyli obrót o $180°$. Taka grupa bardzo słabo odzwierciedla strukturę obiektu. Powodem jest jego „nijednorodność”. Do opisu symetrii takich obiektów lepiej służą grupoidy, uogólnienia grup [Wei96].

Literatura

[Wei96] Alan Weinstein, *Grupoids: Unifying internal and external symmetry*, dostępne na http://math.berkeley.edu/ alanw.