Zadania z Analizy, Seria I

1. Używając metody indukcji matematycznej, udowodnij

   (a) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.
   Wskazówka: skorzystaj ze wzoru $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

   (b) $(x_1 + \cdots + x_n)/n \geqslant \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$ dla dowolnych $x_i \in \mathbb{R}, x_i > 0$.

2. Znajdź $\sup, \inf, \max, \min$ (jeżeli istnieją) dla zbiorów:

   (a) $\{\frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}, 0 < m < n\}$;

   (b) $\{(-1)^{n-1}(2 + \frac{3}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$;

   (c) $\{1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2} \mid n \in \mathbb{N}\}$;

   (d) $\{\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2} \mid n \in \mathbb{N}\}$

3. Oblicz granice ciągów

   (a) $a_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$;

   (b) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;

   (c) $a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^{n+1}}$;

   (d) $a_n = \sqrt[n]{(1/10)^n + 8^{n-3}}$;

   (e) $a_n = \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$ *Wskazówka: skorzystaj z twierdzenia Stolza, odp.* 2/3.

4. Zbadaj, które z poniższych odwzorowań są injektywne, surjektywne, bijektywne. Do bijektywnych znajdź odwrotne:

   (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + x + 2$;

   (b) $f : [-1, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + x + 2$;

   (c) $f : [-1, +\infty) \to (-\infty, 2\frac{1}{4}], f(x) = -x^2 + x + 2$;

   (d) $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + x + 2$;

   (e) $f : [1, +\infty) \to (-\infty, 2], f(x) = -x^2 + x + 2$;

   (f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x$;

   (g) $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x$;

   (h) $f : [-\pi, \pi] \to [-1, 1], f(x) = \sin x$;

   (i) $f : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}, f(x) = \sin x$;

   (j) $f : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1], f(x) = \sin x$;

   (k) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x + 1)^3$;

   (l) $f : \mathbb{R}_{\neq 1} \to \mathbb{R}_{\neq -1}, f(x) = \frac{1+x}{1-x}$.

5. Naszkicuj wykresy funkcji

   (a) $f(x) = \cos(x + \pi/2)$;

   (b) $f(x) = -2^{(x-1)} + 1$.

6. Oblicz granice

(a) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-4x+3}$;

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-9}{x^2-4x+3}$;

(c) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-9}{x^2-4x+3}$;

(d) $\lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x^2-4x+3}$;

(e) $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x(x+1)} - \frac{2}{x(x+2)})$;

(f) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x(x-1)}-\sqrt[3]{x}}{x}$.