Zadania domowe z algebry, seria 1, semestr letni 2009/2010

1. Obliczyć wyznacznik macierzy $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

2. Niech $a, b \in \mathbb{C}, a \neq b$. Wyprowadzić wzór ogólny na wyznacznik D_n stopnia $n \in \mathbb{N}$:

$$D_n := \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a+b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a+b \end{vmatrix}.$$

3. Obliczyć wyznacznik stopnia $n \geqslant 3$ następującej macierzy 3-pasmowej:

$$\mathbf{A} := \begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

o wyrazach $\begin{cases} A^i_{i+1} & = & -2, 1, \dots, 1, 4, \\ A^i_i & = & 5, 3, \dots, 3, \\ A^{i+1}_i & = & 1, 2, \dots, 2, -2. \end{cases}$

4. Obliczyć macierz odwrotną dwoma sposobami (przez obliczenie macierzy dopełnień algebraicznych oraz używając elementarnych operacji nad wierszami):

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \ (b) \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \ (c) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

5. Rozwiązać następujące układy równań liniowych:

   (a)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 0 \\ 4x_1 + x_2 + 8x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1\\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 2\\
x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 3\\
4x_1 + x_2 + 8x_3 - x_4 &= 4
\end{aligned}$$

6. Znaleźć bazę jądra i obrazu macierzy A (rozumianej, jako odwzorowanie liniowe $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$)

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$;

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

Wskazówka: Jądro macierzy o n kolumnach i m wierszach pokrywa się ze zbiorem rozwiązań równania $Ax = \mathbf{0}$, gdzie $x \in \mathbb{R}^n$, a $\mathbf{0}$ jest wektorem zerowym w $\mathbb{R}^m$. Obraz macierzy jest generowany przez jej kolumny.

7. Wyznaczyć w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$ zbiór rozwiązań układu

$$\begin{bmatrix} -1 & 1+p & 1+p \\ -p & 3+p & 2 \\ 1 & 2 & 3+p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$