

Zadania domowe z klasycznej teorii pola — seria II

Zadanie. 1. Pokaż, że część równań Maxwella przedstawionych w postaci

$$*d*F = \frac{J}{\epsilon_0}$$

jest równoważna równaniom

$$\partial_\mu F^{\nu\mu} = \frac{J^\nu}{\epsilon_0}.$$

Zadanie. 2. Wypisz równania Eulera-Lagrange'a dla

1. teorii rzeczywistego pola skalarnego φ na $\mathbb{M}^4$ o lagranżjanie

$$\mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi) = -\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi) - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - \frac{1}{4}\lambda\varphi^4,$$

gdzie m i λ są stałymi. Porównaj otrzymane równania z przypadkiem $\lambda = 0$.

2. teorii zespolonego pola skalarnego ϕ na $\mathbb{M}^4$ o lagranżjanie

$$\mathcal{L}(\phi, \partial\phi) = -(D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi).$$

W powyższym wzorze $D_\mu := \partial_\mu + ieA_\mu$, gdzie e jest stałą, a A_μ — składowymi ustalonej jednoformy potencjału pola elektromagnetycznego.

Zadanie. 3. Niech $(\eta_{IJ}) = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, $(I, J = 0, 1, 2, 3)$. Rozważmy (i) zbiór jednoform $\{e^I\}$ na $\mathbb{R}^4$ takich, że dla każdego $x \in \mathbb{R}^4$ jednoformy $\{e^I(x)\}$ są liniowo niezależne, (ii) zbiór jednoform $A^I{}_J$ na $\mathbb{R}^4$ takich, że $A_{IJ} := \eta_{IK}A^K{}_J$ spełniają $A_{IJ} = -A_{JI}$ oraz (iii) działanie

$$S[e^I, A^I{}_J] := \int_{\Omega} \epsilon_{IJKL} e^I \wedge e^J \wedge F^{KL},$$

gdzie $F^I{}_J := dA^I{}_J + A^I{}_K \wedge A^K{}_J$ oraz ϵ_{IJKL} jest całkowicie antysymetrycznym symbolem takim, że $\epsilon_{0123} = 1$. Znajdź równania na pola $e^I, A^I{}_J$ wynikające z zasady wariacyjnej.

Zadanie. 4. Znajdź kanoniczny tensor energii-pędu dla teorii

1. rzeczywistego pola skalarnego φ opisanego lagranżjanem

$$\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu\varphi) = -\frac{1}{2}\partial^\mu\varphi\partial_\mu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2;$$

2. teorii opisaną działaniem

$$S[A, \sigma, \Psi] = \int_{\mathbb{R}^4} \sigma \wedge dA - \frac{1}{2}\Psi\sigma \wedge \sigma,$$

gdzie A jest jednoformą, σ — dwuformą, a Ψ — funkcją (zeroformą) na $\mathbb{R}^4$.

Zadanie. 5. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{M}^4$. Rozważmy działania:

$$S[A, \sigma, \Psi] = \int_{\Omega} \sigma \wedge dA - \frac{1}{2} \Psi \sigma \wedge \sigma,$$

oraz

$$S[\varphi] = \int_{\Omega} \left[-\frac{1}{2} g^{\nu\mu} \partial_{\nu} \varphi \partial_{\mu} \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \right] d^4x.$$

Sprawdź, czy dla dowolnego dyfeomorfizmu $\alpha : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ zachowującego zbiór Ω zachodzi

$$S[A, \sigma, \Psi] = S[\alpha^* A, \alpha^* \sigma, \alpha^* \Psi] \quad \text{ i } \quad S[\varphi] = S[\alpha^* \varphi],$$

gdzie α^* oznacza cofnięcie k -formy (w tym również 0-formy czyli funkcji) za pomocą α .

Zadanie. 6. Wyraż składowe *symetrycznego* tensora energii-pędu pola elektromagnetycznego przez składowe pól $\vec{E}$ i $\vec{B}$, a następnie oblicz te składowe dla potencjału Lienarda-Wiecherta.