

1 Podsumowanie ćwiczeń 17.02

Niech (V, g) będzie przestrzenią wektorową V o wymiarze n z metryką g o sygnaturze (p, q) (q — liczba minusów). Niech V^* będzie przestrzenią dualną, a (ω^a) — jej bazą dualną do pewnej ortonormalnej bazy (e_a) przestrzeni V . Forma objętości ϵ zdefiniowana jest następująco:

$$\epsilon := \omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^n = \epsilon_{a_1 \dots a_n} \omega^{a_1} \otimes \dots \otimes \omega^{a_n}$$

W bazie (ω^a) $\epsilon_{12\dots n} = 1$. Niech:

$$\epsilon^{a_1 \dots a_n} = g^{a_1 b_1} \dots g^{a_n b_n} \epsilon_{b_1 \dots b_n}$$

Wtedy w bazie (e_a) $\epsilon^{12\dots n} = (-1)^q$.

Zachodzi wzór:

$$\epsilon_{c_1 \dots c_k b_{k+1} \dots b_n} \epsilon^{c_1 \dots c_k a_{k+1} \dots a_n} = (-1)^q k! (n-k)! \delta^{[a_{k+1}}_{b_{k+1}} \dots \delta^{a_n]}_{b_n} \quad (1)$$

Dualizacja Hodge'a: $(n-k)$ -formie α przyporządkowuje się k -formę $*\alpha$, której działanie na wektory $(X_1, \dots, X_k)$ jest zdefiniowane jak następuje

$$(*\alpha)(X_1, \dots, X_k) \epsilon = (-1)^q \alpha \wedge g(X_1, \cdot) \wedge \dots \wedge g(X_k, \cdot),$$

gdzie $g(X, \cdot)$ jest kowektorem (czyli jednoformą) otrzymanym z wektora X przez “opuszczenie” wskaźnika za pomocą metryki g . Po rozpisaniu powyższego w bazie $(\omega^{a_1} \otimes \dots \otimes \omega^{a_n})$ i położeniu $(X_1, \dots, X_k) = (e_{b_1}, \dots, e_{b_k})$

$$\begin{aligned} (*\alpha)(e_{b_1}, \dots, e_{b_k}) \epsilon_{a_1 \dots a_n} &= (*\alpha)_{b_1 \dots b_k} \epsilon_{a_1 \dots a_n} = \\ &= \frac{(-1)^q n!}{(n-k)!} (\alpha_{[a_1 \dots a_{n-k}}) (g_{b_1 | a_{n-k+1}}) \dots (g_{b_k | a_n}] \end{aligned}$$

gdzie antysymetryzacja nie dotyczy wskaźników $\{b_i\}$. Po zwężeniu obydwu stron z $\epsilon^{a_1 \dots a_n}$ i zastosowaniu (1) otrzymujemy:

$$(*\alpha)_{b_1 \dots b_k} = \frac{1}{(n-k)!} \alpha_{a_1 \dots a_{n-k}} \epsilon^{a_1 \dots a_{n-k} b_1 \dots b_k}$$

2 Zadania domowe

Zadanie. 1. Niech $T_{a_1 \dots a_k}$ będą składowymi pewnego tensora. Pokaż, że

$$T_{a_1 \dots a_k} \theta^{a_1} \wedge \dots \wedge \theta^{a_k} = k! T_{[a_1 \dots a_k]} \theta^{a_1} \otimes \dots \otimes \theta^{a_k}.$$

Zadanie. 2. Niech $T^{a_1 \dots a_k}$ będą składowymi pewnego tensora działającego na kowektory z przestrzeni dualnej do n -wymiarowej przestrzeni V (tzn. $a_i \in \{1, \dots, n\}$). Pokaż, że jeśli α jest k -formą na V to

$$T^{a_1 \dots a_n} \alpha_{a_1 \dots a_n} = T^{[a_1 \dots a_n]} \alpha_{a_1 \dots a_n}.$$

Zadanie. 3. Niech $\alpha \in A^k(V)$, gdzie $\dim V = n$. Niech g będzie metryką na V o sygnaturze (p, q) .

1. Pokaż, że

$$* * \alpha = (-1)^{k(n-k)+q} \alpha.$$

2. Zdefiniujmy iloczyn skalarny dla $\alpha, \beta \in A^k(V)$ jako

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \frac{1}{k!} \alpha_{a_1 \dots a_k} g^{a_1 b_1} \dots g^{a_k b_k} \beta_{b_1 \dots b_k} = \frac{1}{k!} \alpha^{a_1 \dots a_k} \beta_{a_1 \dots a_k}.$$

Pokaż, że

$$\langle \alpha | \beta \rangle \epsilon = \alpha \wedge (*\beta) = \beta \wedge (*\alpha).$$

Zadanie. 4. Niech $\alpha \in A^k(V)$, gdzie $\dim V = 2k$. Niech g będzie metryką na V o sygnaturze (p, q) .

1. Znajdź wartości i wektory własne operatora $*$: $A^k(V) \rightarrow A^k(V)$ (uwaga: w niektórych przypadkach konieczne będzie rozszerzenie dziedziny operatora $*$ z k -form o wartościach rzeczywistych do k -form o wartościach zespolonych).
2. Znajdź operator $*^\dagger$ tzn, taki operator, że $\forall \alpha, \beta \in A^k(V)$

$$\langle *^\dagger \alpha | \beta \rangle = \langle \alpha | * \beta \rangle.$$

3. Niech k będzie parzyste oraz niech $*\alpha = c\alpha$ i $*\beta = -c\beta$, gdzie $c \in \mathbb{C}$. Pokaż, że

$$\alpha \wedge \beta = 0 \iff \langle \alpha | \beta \rangle = 0.$$

Zadanie. 5. Niech α, β będą k -formami różniczkowymi na $\mathbb{R}^n$ tzn. niech $\alpha, \beta \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$. Załóżmy, że znikają one dostatecznie szybko przy $\|x\| \rightarrow \infty$ tzn. składowe form α, β w bazie $(dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_k})$ są funkcjami znikającymi dostatecznie szybko przy $\|x\| \rightarrow \infty$. Niech g będzie metryką o sygnaturze (p, q) na $\mathbb{R}^n$.

1. Pokaż, że

$$\langle \alpha | \beta \rangle' := \int_{\mathbb{R}^n} \alpha \wedge (*\beta)$$

definiuje iloczyn skalarny na $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$.

2. Załóżmy teraz, że β jest $(k-1)$ -formą na $\mathbb{R}^n$ znikającą dostatecznie szybko przy $\|x\| \rightarrow \infty$. Znajdź operator $d^\dagger : \Lambda^k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Lambda^{(k-1)}(\mathbb{R}^n)$ taki, że równość

$$\langle \alpha | d\beta \rangle' = \langle d^\dagger \alpha | \beta \rangle'$$

zachodzi $\forall \alpha, \beta$.