

Zad. domowe nr 4: 25.03. (gr. 2) / 27.03. (gr. 1 i 3)

Studnia, ewolucja czasowa

1. Zadanie obowiązkowe

Znajdź poziomy energetyczne i unormowane funkcje falowe czastki poruszającej się w potencjale zakładając, że całkowita energia czastki $E < 0$

$$V(x) = \begin{cases} \infty & , \quad x < 0 \\ -V_0 & , \quad 0 \leq x \leq a \\ 0, & , \quad a \leq x \end{cases} .$$

W tym celu: (i) zapisz równanie Schroedingera i zapisz odpowiadające mu równania różniczkowe w odpowiednich obszarach potencjału (bada tylko dwa takie równania, a nie trzy jak na ćwiczeniach – czemu?), (ii) znajdź ogólne rozwiązania równań różniczkowych, (iii) zapisz warunki brzegowe dotyczące znikania funkcji falowych w $x = \infty$ oraz $x = 0$ (uwaga: ze względu na lewostronna nieskończona bariera potencjału, funkcja falowa musi znikać już na lewym brzegu tej bariery) i narzuć je na rozwiązanie równań różniczkowych (po ich narzuceniu powinny pozostać dwie stałe w funkcjach falowych, które są nieokreślone), (iv) zapisz warunki zszycia dla $x = a$ (dlaczego w $x = 0$ warunki zszycia są niepotrzebne?) i narzuć je na rozwiązanie równań różniczkowych [to powinno określić jedną stałą oraz powinno doprowadzić do dodatkowego warunku na skwantowanie wartości energii – E_n i związanych z nimi funkcji falowych $\phi_n(x)$], (v) zapisz warunki normalizacji i narzuć je na rozwiązanie równań różniczkowych (to powinno określić tą jedną stałą, która została po narzuceniu warunków zszycia), (vi) zapisz otrzymane funkcje falowe $\phi_n(x)$ dla poszczególnych wartości energii E_n .

Wskazówka: Jeśli rozwiązując warunki zszycia [punkt (iv) powyżej] natkniesz się na układ dwóch równań, w których jedno to równanie przestępne [tj. równanie typu $\lambda \sim k \operatorname{tg} k$ albo $\lambda \sim k \operatorname{ctg} k$], nie musisz znajdować dokładnych rozwiązań. Wystarczy, że naszkicujesz ręcznie rozwiązania metoda graficzna (podobnie jak na ćwiczeniach) i pokażesz, że istnieją takie λ i takie k , które spełniają powyższe równania; napisz jak z wyliczonych wartości λ i k otrzymać warunek na skwantowanie wartości energii E_n .

2. Zadanie obowiązkowe

W chwili początkowej (tj. $t = 0$) czastka poruszająca się w nieskończenie głębokiej studni potencjału,

$$V_\infty(x) = \begin{cases} \infty & , \quad x < -a \\ 0 & , \quad -a \leq x \leq a \\ \infty & , \quad a < x \end{cases} ,$$

znajdowała się w stanie opisanym funkcja falowa

$$\Psi(x, t = 0) \equiv \Psi(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{a}} & , \quad 0 \leq x \leq a \\ 0 & , \quad x < 0 \\ 0 & , \quad a < x \end{cases} .$$

Wyznacz ewolucje funkcji falowej czastki.

Wskazowka: Stany własne i energie nieskonczonej studni:

$$E_n = \frac{n^2 \hbar^2 \pi^2}{8ma^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\begin{aligned} \phi_{2k}(x) &= \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{2k\pi x}{2a}\right) \quad \text{gdy } n = 2k \\ \phi_{2k+1}(x) &= \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2a}\right) \quad \text{gdy } n = 2k+1 \end{aligned}$$

3. *Zadanie nieobowiazkowe, dla chetnych, podnoszace ilosc punktow otrzymanych z jednego z powyzzszych zadan (tj. tego, ktore zbiore) od 0% do 30% (w zaleznosci od jakosci wykonania tego zadania)*

Rozwiaz numerycznie ukklad rownan o ktorym mowa we *wskazowce* do Zad. 1 dla roznych wybranych przez siebie wartosci potencjalu V_0 . Dobierz wartosc potencjalu V_0 dostosowujac go do pozostalych stalych w ukkladzie, tak ze r w rownaniu typu $\lambda^2 + k^2 = r^2$ bedzie rzędu jednosci (jako a przyjmij promien Bohra podany w tablicach / wikipedii; jako m przyjmij mase elektronu, ktora znajdziesz w tablicach / wikipedii; stala Plancka tez jest okreslona w tablicach / wikipedii).