Zad. domowe nr 1 na 4.03. (gr. 2) albo 6.03. (gr. 1 i 3)

Elementy Rachunku Prawdopodobieństwa i Delta Diraca

1. *Zadanie obowiazkowe*

   Oblicz wartość średnią $\langle X \rangle$ oraz dyspersje $\langle \Delta^2 X \rangle$ rozkładu wykladniczego o gęstości

   $$p(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \tag{1}$$

   gdzie zmienna losowa $x \in [0, \infty)$ oraz parametr $\lambda > 0$.

   Wskazowka Pamietaj, ze dyspersja jest zdefiniowana wzorem $\langle \Delta^2 X \rangle \equiv \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2$ oraz zauwaz ze zmienna losowa w tym przypadku jest liczba nieujemna a zatem nie przyjmuje jakiejkolwiek wartosci rzeczywistej (jak to mialo miejsce w rozkladzie Gaussa).

2. *Zadanie obowiazkowe*

   Zdefinujmy funkcje $\delta_\tau(x)$ zmiennej x, zalezna od parametru τ jako

   $$\delta_\tau(x) = \frac{1}{2\tau} e^{-\frac{|x|}{\tau}}. \tag{2}$$

   Pokaz, ze model delty Diraca oparty o powyzsza funkcje $\delta_\tau(x)$, tj. granica funkcji $\delta_\tau(x)$ przy τ dazacym do 0 $[\lim_{\tau \to 0} \delta_\tau(x)]$ spelnia 'kluczowa' wlasnosc delta Diraca omawiana na cwiczeniach.

   Wskazowka 1 'Kluczowa' wlasnosc delty Diraca jest nastepujaca – otoz dla odpowiednio dobranej klasy funkcji próbnych $\psi(x)$ zachodzi

   $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \psi(x) dx = \psi(0). \tag{3}$$

   Wskazowka 2 Oblicz lewa strone rownania nr. (3) podstawiajac $\lim_{\tau \to 0} \delta_\tau(x)$ za $\delta(x)$ i sprawdz czy lewa strona jest wowczas rowna $\psi(0)$. Liczac uwazaj na wartosc bezwzgledna ($|x|$) uzyta w definicji modelu delty Diraca: podziel calke na dwie osobne calki (dla x od $-\infty$ do 0 oraz dla x od 0 do $+\infty$). Pamietaj, ze nie musisz wiedziec jak wyglada przepis na funkcje $\psi(x)$ by wykonac powyzsze obliczenia.

3. *Zadanie nieobowiazkowe, dla chetnych, podnoszace ilosc punktow otrzymanych z jednego z powyzszych zadan (tj. tego, ktore zbiore) od 0% do 30% (w zaleznosci od jakosci wykonania tego zadania)*

   Narysuj przy pomocy Mathematici, Maple lub innego programu funkcje $\frac{1}{2\tau} e^{-\frac{|x|}{\tau}}$ w zaleznosci od x i dla roznych wartosci parametru τ tak by jasno bylo widac, ze jak τ bedzie dazyc do 0 to funkcja $\frac{1}{2\tau} e^{-\frac{|x|}{\tau}}$ bedzie coraz bardziej 'przypominac' delte Diraca. Wydrukuj wykresy wraz z sensownym opisem i przynies na cwiczenia.