Fizyka Statystyczna A, 2024/2025
Zadania domowe seria 2 — Rozwiązania

Zadanie 1

Rzucamy symetryczną sześcienną kostką tak długo, aż wyrzucimy wszystkie oczka (czyli do momentu kiedy każda ścianka kostki wypadnie przynajmniej jeden raz). Znaleźć wartość oczekiwaną liczby rzutów.

Rozwiązanie

Niech X_i oznacza liczbę rzutów kostką do momentu kiedy wypadnie wynik różny od i wybranych liczb ze zbioru 1,2,3,4,5,6.

$$P(X_i = k) = (1-p_i)^{k-1}\, p_i \quad \text{gdzie: } p_i = \frac{7-i}{6}$$

Wartość oczekiwana X_i to:

$$E(X_i) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, P(X_i = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, (1-p_i)^{k-1}\, p_i = p_i \frac{\partial}{\partial p_i} \sum_{k=1}^{\infty} (1-p_i)^k = \frac{1}{p_i} = \frac{6}{7-i}$$

Wartość oczekiwana liczby rzutów potrzebnych do wyrzucenia wszystkich ścian kostki to:

$$EX = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) + E(X_5) + E(X_6) = \frac{6}{6} + \frac{6}{5} + \frac{6}{5} + \frac{6}{3} + \frac{6}{2} + \frac{6}{1} = \frac{147}{10}$$

Zadanie 2

Pokazać, że n nierozróżnialnych kul można rozmieścić w k rozróżnialnych przegródek na $\binom{n+k-1}{k-1}$ sposobów.

Rozwiązanie

Rozważmy każdy ciąg k przegrodek w wypełnionych rżónymi liczbami nierozróżnialnych (np. białych) kulek, można zapisaćjako ciąg kul białych poprzedzielanych $k-1$ kulami innego koloru (np. czarnymi). Np ciągowi 6 przegródek wypełnionych kolejno: pierwsza — 1 kulką, druga — 3 kulkami, trzecia — pusta, i kolejne zawierające 1, 4, 2 kulki, odpowiada:

$$| \underbrace{\circ}_{1} \bullet \underbrace{\circ\ \circ\ \circ}_{3} \bullet \underbrace{\quad}_{0} \bullet \underbrace{\circ}_{1} \bullet \underbrace{\circ\ \circ\ \circ\ \circ}_{4} \bullet \underbrace{\circ\ \circ}_{2} |$$

Liczba możliwych rozmieszczeń n nierozróżnialnych kul w k przegródkach jest zatem równa liczbie sposobów na które z $n+k-1$ kul można wybrać $k-1$ kul czarnych i n kul białych czyli:

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$$

Zadanie 3

Na ćwiczeniach rozważaliśmy układ N nieoddziałujących atomów dwustanowych — mogących przebywać w stanie podstawowym o energii 0 i stanie wzbudzonym o energii ϵ.
Rozważmy N atomów z których każdy może przebywaćw jednym z trzech stanów: podstawowym o energii 0, pierwszym wzbudzonym o energii ϵ lub drugim stanie wzbudzonym także o energii ϵ.

1. Znaleźć entropię $S(E,N)$ dla powyższego układu.
2. Obliczyć temperaturę T w funkcji energii wewnętrznej.
3. Obliczyć energię wewnętrzną w funkcji temperatury i pojemność cieplną C_V.

Rozwiązanie

1. $S(E,N)$

$$\Omega(E,N) = \binom{N}{E/\epsilon} 2^{E/\epsilon}$$

$$S(E,N) = k\log\Omega(E,N) = Nk\left[\underbrace{-\frac{E}{N\epsilon}\log\frac{E}{N\epsilon} - \left(1-\frac{E}{N\epsilon}\right)\log\left(1-\frac{E}{N\epsilon}\right)}_{\text{było na ćwiczeniach}} + \frac{E}{N\epsilon}\log 2\right]$$

2. T

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{V,N} = \frac{k}{\epsilon}\left[\log\frac{E}{N\epsilon} - \log\left(1-\frac{E}{N\epsilon}\right) + \log 2\right] = \frac{k}{\epsilon}\left[\log\left(\frac{N\epsilon}{E}-1\right) + \log 2\right]$$

3. $E(T)$ i C_V.

$$E(T) = N\epsilon\left[1+\frac{1}{2}\exp\frac{\epsilon}{kT}\right]^{-1}$$

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{V,N} = Nk\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}\exp\frac{\epsilon}{kT}\right]^{-2}\left(\frac{\epsilon}{kT}\right)^2$$

Zadanie 4

Na wykładnie rozważany był w zespole mikrokanonicznym gaz cząstek masywnych.
Rozważmy teraz gaz N nierozróżnialnych cząstek bezmasowych (ultra-relatywistycznych) poruszających się w jednym wymiarze. Energia dana jest przez hamiltonian:

$$H(\{q,p\}) = \sum_{i=1}^{N} \big(c|p_i| + U(q_i)\big),$$

gdzie $U(q_i) = 0$ gdy $0 \leqslant q_i \leqslant L$ oraz $U(q_i) = \infty$ w pozostałych przypadkach. Rozważamy zespół mikrokanoniczny o całkowitej energii E.

1. Znaleźć entropię $S(E,L,N)$ dla powyższego układu.
   Wskazówka: objętość zbioru $\sum_{i=1}^{d} x_i \leqslant R$ dla $x_i \geqslant 0$ w d wymiarach dane jest przez $R^d/d!$.
2. Obliczyć temperaturę T w funkcji energii wewnętrznej.
3. Obliczyć ciśnienie p. Wyznaczyć równanie stanu.
4. Obliczyć ciepła właściwe C_L oraz C_p.
5. Jakie jest prawdopodobieństwo $p(p_1)$ znalezienia cząstki o pędzie p_1?

Rozwiązanie

$$H(\{p_i,q_i\}) = \sum_{i=1}^{N} \left[C|p_i| + U(q_i)\right],$$

gdzie $U(q_i) = 0$ dla $0 \leqslant q_i \leqslant L$, a $U(q_i) = \infty$ w przeciwnym wypadku.
Rozważamy zespół mikrokanoniczny o całkowitej energii układu E.

Wkład od położeń do $\bar{\Omega}$:

$$\bar{\Omega}_q(E,L,N) = \frac{L^N}{N!}.$$

Wkład od pędów do $\bar{\Omega}$:

$$\bar{\Omega}_p(E,L,N) = 2^N \cdot \frac{1}{N!}\left(\frac{E}{c}\right)^N.$$

$$\Omega(E,L,N) = \frac{1}{h^N}\frac{\partial}{\partial E}\bar{\Omega}_q(E)\,\bar{\Omega}_p(E) = \frac{1}{h^N}\frac{L^N}{N!}N2^N\left(\frac{E}{c}\right)^{N-1}.$$

(1) Entropia $S(E,L,N)$.

$$S(E,L,N) = k\log\Omega(E,L,N)$$

W granicy dużych N, entropia jest dana wzorem:

$$S(E,L,N) = Nk\ln\left(\frac{2e^2L}{hc}\frac{E}{N}\right).$$

(3) Temperatura

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{L,N} = \frac{Nk}{E}$$

(3) Jednowymiarowe ciśnienie

Z równania $dE = TdS - PdV + \mu dN$, ciśnienie jest dane wzorem:

$$P = T\Big(\frac{\partial S}{\partial L}\Big)_{E,N} = \frac{Nk_BT}{L}.$$

(4) Oblicz pojemności cieplne C_L i C_P.

$$E = Nk_BT, \quad C_L = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{L,N} = Nk_B.$$

Włączając pracę wykonaną przeciwko ciśnieniu zewnętrznemu oraz korzystając z równania stanu:

$$C_P = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{P,N} + P\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_{P,N} = 2Nk_B.$$

(5) Jaka jest prawdopodobieństwo $p(p_1)$ znalezienia cząstki o pędzie p_1?

Zakładając, że p_1 jest ustalone dla pierwszej cząstki, pozostałe $N-1$ cząstki dzielą energię $(E - c|p_1|)$. Ponieważ nie interesują nas współrzędne, możemy obliczyć prawdopodobieństwo z ilorazu przestrzeni fazowej dla pędów, czyli:

$$p(p_1) = \frac{\Omega_p\big(E - c|p_1|, N-1\big)}{\Omega_p(E, N)}.$$

Mamy:

$$\Omega_p = \frac{2^{N-1}}{(N-1)!}\left(\frac{E - c|p_1|}{c}\right)^{N-1} \cdot \frac{N!}{2^N}\left(\frac{c}{E}\right)^N,$$

co daje:

$$p(p_1) \approx \frac{cN}{2E}\left(1 - \frac{c|p_1|}{E}\right)^N \approx \frac{cN}{2E}\exp\left(-\frac{cN|p_1|}{E}\right).$$

Podstawiając $E = Nk_BT$, otrzymujemy znormalizowaną wagę Boltzmannowską:

$$p(p_1) = \frac{c}{2k_BT}\exp\left(-\frac{c|p_1|}{k_BT}\right).$$

Zadanie 5

W zbiorniku o kształcie sześcianu $L \times L \times L$ znajduje się N cząsteczek gazu doskonałego. Ścianki naczynia są sztywne i adiabatyczne (czyli cząstki odbijają się od nich sprężyście). Znaleźć fluktuacje (tj. odchylenie standardowe) położenia środka masy gazu w stanie równowagi. Jak te fluktuacje zależą od N?

Rozwiązanie

$$\langle \mathbf{R}_{\mathrm{CM}} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \langle \mathbf{R}_i \rangle = \langle \mathbf{R}_1 \rangle = \frac{1}{V} \int \mathbf{R}_1 d\mathbf{R}_1 = 0.$$

Całkowanie oczywiście po sześcianie.

$$\langle \mathbf{R}_{\mathrm{CM}}^2 \rangle = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N} \langle \mathbf{R}_i^2 \rangle + \frac{1}{N^2} \sum_{i \neq j} \langle \mathbf{R}_i \cdot \mathbf{R}_j \rangle,$$

ale druga z całek znika.

$$\langle (\Delta \mathbf{R}_{\mathrm{CM}})^2 \rangle = \frac{1}{N} \langle \mathbf{R}_1^2 \rangle = \frac{1}{NL^3} \int (x^2 + y^2 + z^2) dx\, dy\, dz = \frac{L^2}{4N}.$$

Stąd

$$\sigma = \frac{L}{2\sqrt{N}}.$$

Zadanie 6

Rozważamy gaz N, twardych (sprężyście się odbijających), nierozróżnialnych kul, z których każda ma objętość ω i masę m. Kule poruszają się w pudle o objętości V. Obliczyć $S(E,N,V)$, wyznaczyć równanie stanu i pokazać, że ściśliwość izotermiczna

$$\kappa_T := -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$$

jest dodatnia.
Wskazówka: skorzystać z przybliżenia

$$(V - n\omega)(V - (N-n)\omega) \approx (V - \frac{N\omega}{2})^2.$$

Rozwiązanie

$$\Omega = \frac{1}{h^{3N}\,N!}\int_{H=E}\prod_{i=1}^{N} d^3\vec{p}_i d^3\vec{q}_i \qquad H = \sum_{i=1}^{N}\frac{p_i^2}{2m}$$

Całkowanie po pędach wykonujemy tak jak dla gazu doskonałego (kożystając z wyprowadzonego wzoru na objętość $3N$-wymiarowej kuli):

$$\Omega = \frac{(2m\,E)^{3N/2-1}}{h^{3N}\,N!}\frac{2\pi^{3N}}{(3N/2-1)!}\int\prod_{i=1}^{N} d^3\vec{q}_i$$

natomiast całkowanie po położeniach można (w sposób przybliżony) wykonać kożystając ze wskazówki:

$$\int\prod_{i=1}^{N} d^3\vec{q}_i = V\,(V-\omega)\,(V-2\omega)\,(V-3\omega)\cdots(V-(N-1)\omega)$$
$$\approx \Big(V - N\omega/2\Big)^N$$

Entropia:

$$S = k\log\Omega = Nk\log\left[\frac{1}{N}\Big(V - \frac{N\omega}{2}\Big)\left(\frac{4\pi\,m\,E}{3N\,h^2}\right)^{3/2}\right]$$

Równanie stanu:

$$\frac{p}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{E,N} = \frac{Nk}{V - \frac{N\omega}{2}}$$

zatem:

$$p\Big(V - \frac{N\omega}{2}\Big) = NkT$$

Ściśliwość

$$\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{T,N} = \frac{NkT}{p^2V}$$