1) Sceneria: w zasadzie przestrzeń Euklidesowa n-wymiarowa ale tak naprawdę dowolna rozmaitość różniczkowa.

2) Przypomnienie: pochodna funkcji złożonej $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\Phi : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto (u, v) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(u(x,y), v(x,y)) = \frac{\partial f(u,v)}{\partial u}|_{u=u(x,y),v=(x,y)} \frac{\partial}{\partial x} u(x,y) + \frac{\partial f(u,v)}{\partial v}|_{u=u(x,y),v=(x,y)} \frac{\partial}{\partial x} v(x,y)$$

$$\begin{array}{l} g(x,y) := f(u(x,y), v(x,y)) = f(u,v) \\ \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} u(x,y) \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial x} v(x,y) \frac{\partial}{\partial v} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} u(x,y) \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y} v(x,y) \frac{\partial}{\partial v} \end{array}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial u^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial u^j}, \quad \frac{\partial}{\partial u^i} = \frac{\partial x^j}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad \frac{\partial x^k}{\partial u^i} \frac{\partial u^i}{\partial x^j} = \delta^k_j$$

Ćwiczenia

a) $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$ **Wyrazić** $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ **przez** $\frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{\partial}{\partial \phi}$ **(warto pokazać trick kiedy unika się odwracania** $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$**)**

3) Zamiana zmiennych w operatorach różniczkowych

Rozwiąż równanie $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi(x,y) = 0$

Ćwiczenia

a) **Zapisać 2D Laplasjan we współrzędnych biegunowych (tak na siłę mnożąc operatory, do Laplasjanu wrócimy)**

4) Pochodna (różniczka) funkcji z podkreśleniem, że to operator liniowy a dx^i pewna baza

$$df(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy$$

Ćwiczenia

a) **Znajdź bazę dualną** $([a,b],[c,d])$ **do bazy** $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

b) **Oblicz wartość pochodnej funkcji $x^2 + y^3 \sin z$ na wektorze $h^1 e_x + h^2 e_y + 7e_z$ w punkcie $(1, 2, \pi)$**

5) Krzywe, powierzchnie sparametryzowane i wektory (oraz proste i płaszczyzny) doń styczne

Ćwiczenia

a) **Znaleźć wektor styczny do linii współrzędnych układu sferycznego zadanej przez $r = 1$, $\phi = \pi/4$ w punkcie $\theta = \pi/4$. Wypisać ogólny wzór na prawo transformacji wektorów gdy przechodzimy od jednego układu współrzędnych do drugiego np.**

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial z}\right)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

i uzasadnić dlaczego $\frac{\partial}{\partial\theta}$, $\frac{\partial}{\partial x}$ w zasadzie możemy traktować (identyfikować) jako wektory styczne do odpowiednich linii współrzędnych.

b) **Pokazać, że $du^i(\frac{\partial}{\partial u^j}) = \delta^i_j$**

6) Wektory styczne do powierzchni zadanej w sposób uwikłany

Ćwiczenia

a) **Znajdź wektory styczne do 3 wymiarowej sfery w 4D (zadanej przez $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$) w pewnym (ogólnym) jej punkcie.**

b) **Znajdź równanie płaszczyzny stycznej do 3 wymiarowej sfery z poprzedniego zadania w wybranym punkcie.**

7) Iloczyn tensorowy

8) Tensor metryczny (metryka), przykłady $dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz$

Ćwiczenia

a) **W $\mathbb{E}^3$ znajdź współrzędne tensora metrycznego we współrzędnych parabolicznych $x = \sqrt{\xi\eta}\cos\phi$, $y = \sqrt{\xi\eta}\sin\phi$, $z = \frac{1}{2}(\xi - \eta)$.**

Obliczamy wszystkie iloczyny skalarne

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial\theta}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} | \frac{\partial}{\partial\theta}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right\rangle$$

A potem kończymy uwagą, że to samo mozna uzyskać zamieniajac różniczki w $dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz$**.**

b) **Wypisać tensory metryczne we współrzędnych cylindrycznych i sferycznych.**

9) Podnoszenie i opuszczanie wskaźnika (tzn. kanoniczny izomorfizm T_pM i T_pM* albo inaczej muzyczne izomorfizmy albo zwężenie metryki z polem wektorowym $\flat$) Adamie Kasia Grabowska używała litery G dla $\flat$ i G^{-1} dla $\sharp$.

Ćwiczenia

a) **Zapisać gradient funkcji skalarnej we współrzędnych parabolicznych tzn.** $\sharp df$

10) Iloczyn tensorowy

11) Iloczyn zewnętrzny Definicja

$$\theta^1 \wedge \ldots \wedge \theta^k = \sum_\sigma \mathrm{sgn}\sigma \theta^{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes \theta^{\sigma(k)}$$

Własności, łączność, rozdzielność względem dodawania,

Ćwiczenia

a) **Pomnóż i uporządkuj** $(dx^1 \wedge dx^2 + 2dx^2 \wedge dx^3 + 3dx^3 \wedge dx^4 + 4dx^4 \wedge dx^5) \wedge (dx^1 \wedge dx^2 + dx^4 \wedge dx^5)$

b) **Oblicz** $ydx \wedge dy \wedge dz \left(\frac{\partial}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial y}, 3\frac{\partial}{\partial x} + 4\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)$

c) **(Zwężenie z polem wektorowym) Oblicz** $ydx \wedge dy \wedge dz(ze_x + xe_y + 7e_z, \cdot, \cdot)$

d) **Pokazać, że każdą 2-formę można sprowadzić do postaci kanonicznej tzn.** $\omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_3 \wedge \omega_4 + \ldots + \omega_{2k+1} \wedge \omega_{2k}$

e) **Zapisz formę objętości we współrzednych parabolicznych. (Na dwa sposoby najpierw wprost zamieniajac różniczki, potem korzystając z $J^2 = g$ gdzie J to Jakobian a g wyznacznik tensora metrycznego znak J dobieramy patrząc na wyznacznik macierzy przejścia w dowolnym punkcie)**

12) Różniczkowanie zewnętrzne

Ćwiczenia

a) **Oblicz pochodną zewnętrzną form** $xdx + ydy + zdz$**,** $xdy - ydx$**,** $zdx \wedge dy + xdy \wedge dz$**, arctg** $(xy)dy \wedge dz + dx \wedge dz - \frac{zy}{1+(xy)^2} dx \wedge dy$ **które z tych form są zamknięte.**

13) Operatory różniczkowe zapisane geometrycznie

Ćwiczenia

a) **Zapisać dywergencję** $(d\Omega(X, \cdot, \cdot) = divX\Omega)$**, rotację** $(d\flat X = \Omega(rotX, \cdot, \cdot))$ **i laplasjan we współrzędnych parabolicznych** (Ω **forma objętości)**

Dalej o k-powierzchniach i całkowaniu k-form.