Zadania treningowe z Matematyki II, sem. let. 2016/2017.
Opracował: Maciej Karczmarczyk

Seria I, 24.03.2017 r.

Zadanie 1. Czy zbiór wektorów

$$\{x^2+x+1,\ x^3+x+1,\ x+1,\ x^3+x^2+1\}$$

stanowi bazę $\mathbb{R}_3[\cdot]$?

Odp. Tak.

Zadanie 2. Znajdź bazę podprzestrzeni $\mathbb{R}^4$ zdefiniowanej przez

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; t+3y+z=0 \text{ i } x+2y+4z=0 \right\}.$$

Odp. Przykładowa baza to

$$\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Zadanie 3. Rozważmy przestrzeń wektorową V rozpiętą przez wektory

$$\{1,\ \sin x,\ \cos x,\ \sin 2x,\ \cos 2x\}.$$

Ile jest liniowo niezależnych wektorów w zbiorze

$$\{(\sin x+\cos x)^2,\ (\sin x-\cos x)^2,\ (\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x),\ (\sin x)^2,\ (\cos x)^2\}?$$

Odp. Trzy.

Zadanie 4. Zapisz w postaci niejawnej (równaniowej) podprzestrzeń V rozpiętą przez wektory

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Odp.

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; t-x-y+z=0 \right\}.$$

Zadanie 5. Rozważmy dwie bazy dwuwymiarowej przestrzeni wektorowej V: $(e_1,\ e_2)$ i $(f_1,\ f_2)$. Wiemy, że dwa wektory $u, v \in V$ wyrażają się w tych bazach następująco:

$$u = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}^f,\ v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}^f.$$

Znajdź macierze zmiany bazy $e \to f$ i $f \to e$. Jaką postać w bazie f ma wektor $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^e$?

Odp. Macierze zmiany bazy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^f_e,\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^e_f.$$

Szukany wektor:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^f_e \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}^f.$$

Zadanie 6. Rozłóż wektor $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ w bazie

$$\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}.$$

Odp.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 7. Podaj bazę części wspólnej podprzestrzeni V i W, gdzie

(a)

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y + z = 0 \right\},\; W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + 2y + 3z = 0 \right\},$$

(b)

$$V = \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\},\; W = \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} \right\}.$$

Odp.

Ad (a)

$$V \cap W = \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$$

Ad (b)

$$V \cap W = \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}.$$

Zadanie 8. Podaj bazę sumy algebraicznej podprzestrzeni V i W, gdzie

(a)

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; t + 2x - y + 3z = 0 \right\},\; W = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{matrix} 2t + x + 2y + z = 0 \\ t - x + y - z = 0 \end{matrix} \right\},$$

(b)

$$V = \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\},\; W = \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Odp.

Ad (a)

$$V + W = \mathbb{R}^4,$$

Ad (b)

$$V + W = \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Uwaga do kolejnych zadań: Bazą dualną do jednomianów $(1,\, x,\, x^2,\, x^3 \dots)$ jest $(w(0),\, w'(0),\, \frac{1}{2}w''(0),\, \frac{1}{6}w^{(3)}(0)\dots)$.

Zadanie 9. Znaleźć bazę dualną do $e = (x^2 - 1,\, x - x^2,\, 1)$.

Odp. $e^* = (w'(0) + \frac{1}{2}w''(0),\, w'(0),\, w(0) + w'(0) + \frac{1}{2}w''(0))$.

Zadanie 10. Znaleźć bazę dualną do bazy $f = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$.

Odp. $f^* = ([0,\, 0,\, 1],\ [0,\, 1,\, -1],\ [1,\, -1,\, 0])$.

Zadanie 11. Rozłóż kowektor $[1,\, 1,\, 1]$ w bazie $([1,\, 0,\, 1],\ [1,\, 0,\, -1],\ [0,\, 1,\, 1])$.

Odp. $[1,\, 1,\, 1] = \frac{1}{2}[1,\, 0,\, 1] + \frac{1}{2}[1,\, 0,\, -1] + [0,\, 1,\, 1]$.

Zadanie 12. Jak wygląda macierz przejścia z bazy $e = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$ do bazy $f = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$?

Odp.

$$[\mathrm{id}]^f{}_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 13. Odwzorowanie liniowe $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ odwzorowuje pewne trzy wektory w następujący sposób:

$$S\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ S\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ S\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Znajdź macierz odwzorowania S w bazie standardowej, obraz S i jądro S.

Odp.

$$[S]^e{}_e = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -3 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & -6 & 4 \end{bmatrix},\ \operatorname{Im} S = \mathbb{R}^3,\ \operatorname{Ker} S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 14. Znajdź obraz i jądro odwzorowania liniowego D o macierzy w bazie standardowej

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Odp.

$$\operatorname{Im} D = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} \right\},\ \operatorname{Ker} D = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}.$$

Zadanie 15. Znajdź macierz odwzorowania $T : \mathbb{R}_3[\cdot] \to \mathbb{R}_3[\cdot]$, $T : w(x) \mapsto w(x-1)$ w bazie standardowej $e = (1,\, x,\, x^2,\, x^3)$.

Odp.

$$[T]^e{}_e = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 16. W przestrzeni $\mathbb{R}_n[\cdot]$ rozważmy odwzorowania $T_\alpha : \mathbb{R}_n[\cdot] \to \mathbb{R}$, $T_\alpha w = w(\alpha)$.

(a) Pokaż, że są to odwzorowania liniowe (a że ich przeciwdziedziną jest $\mathbb{R}$, to są to kowektory!).

(b) Pokaż, że $(T_{-1},\, T_0,\, T_1)$ stanowią bazę kowektorów $\mathbb{R}_2[\cdot]$ i rozłóż w tej bazie kowektor $P : w \mapsto w''(0) + w'(0)$.

Odp. $P = \frac{1}{2}T_{-1} - 2T_0 + \frac{3}{2}T_1$.

Zadanie 17. Rozłóż w bazie z poprzedniego zadania kowektor $S : \mathbb{R}_2[\cdot] \to \mathbb{R}$, $Sw = \int\limits_0^1 w(x)\, \mathrm{d}x$.

Odp. $S = -\frac{1}{3}T_{-1} + \frac{2}{3}T_0 + \frac{2}{3}T_1$.

Zadanie 18. Czy odwzorowanie o macierzy w bazie standardowej $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ jest rzutem? Jeżeli tak, to wzdłuż jakiej podprzestrzeni i na jaką podprzestrzeń?

Odp. Tak, jest to rzut na span $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ wzdłuż span $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Zadanie 19. Znaleźć rzut wektora $\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$ na podprzestrzeń opisaną równaniem $x + y - z = 0$ wzdłuż podprzestrzeni rozpiętej przez wektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Znaleźć macierz operatora tego rzutu w bazie standardowej.

Odp. W wolnej chwili.