03.06.2017

Seria 10
Funkcje wielu zmiennych - szereg Taylora i ekstrema

Zadanie 1. Rozwinąć funkcję $f(x,y) = x^y$ w szereg Taylora do 4 rzędu włącznie wokół punktu $(1,0)$. Wskazówka: Można uniknąć żmudnych rachunków stosując sukcesywnie znane wyrażenia na szeregi Taylora dla elementarnych funkcji jednej zmiennej. Odpowiedź: $1 + (x-1)y - \frac{1}{2}(x-1)^2 y + \frac{1}{3}(x-1)^3 y + \frac{1}{2}(x-1)^2 y^2 + \mathcal{O}[((x-1),y)^5]$.

Zadanie 2. Niech X będzie domkniętym trójkątem o wierzchołkach $(0,0),(2,0),(0,4)$. Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x,y) = xy - x - y + 3$ na zbiorze X.

Zadanie 3. Znaleźć punkty krytyczne funkcji $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$. Sprawdzić, w których z nich ma ona lokalne minima lub maksima.

Zadanie 4. Który z trójkątów o obwodzie $2p$ ma największe pole S? Wskazówka: Dla trójkąta o bokach a, b, c stosujemy wzór Herona $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$, wprowadzamy zmienne $x = a/p$, $y = b/p$, wyrażamy c przez x, y, a następnie szukamy maksimum funkcji $f(x,y) = S^2/p^4$ różniczkując iloczyn trzech wielomianów pierwszego stopnia, bez ich wymnażania. Metoda alternatywna (jeszcze prostsza rachunkowo): szukamy ekstremum związanego funkcji $S^2(a,b,c)$ metodą mnożników Lagrange'a.

Zadanie 5. Znaleźć punkty krytyczne funkcji $f(x,y) = x^4 - y^4 - 4xy^2 - 2x^2$, a następnie wskazać lokalne ekstrema. Wskazówka: W otoczeniu tego z punktów krytycznych, którego charakteru nie da się wyjaśnić ogólnym twierdzeniem, rozważyć f na jednej z osi oraz na paraboli $x = -y^2$.

Zadanie 6. Niech $h(x,y) = ay(e^x - 1) + x\sin x - \cos y$. Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ funkcja h ma lokalne ekstremum w punkcie $(0,0)$? Wskazówka: Dla pewnego a badanie drugiej pochodnej może nie wystarczyć, warto zainteresować się prostą przechodzącą przez $(0,0)$ złożoną z takich punktów (u,v), że:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(0,0)u^2 + 2\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(0,0)uv + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(0,0)v^2 = 0.$$

Zadanie 7. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji

a) $f(x,y) = 6xy - x^3 - y^3$,

b) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4a^2 xy + 2a^2$, gdzie $a \in \mathbb{R}$ jest parametrem,

c) $f(x,y,z) = x^3 + xy + y^2 - 2zx + 2z^2 + 3y - 1$,

d) $f(x,y,z) = 4 - x^2 - \frac{y}{x} - \frac{z^2}{y} - \frac{1}{z}$.

Zadanie 8. Znajdź odległość prostej $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$ od płaszczyzny $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in E\mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x + y + z + w = 1 \\ x - y + z - w = 1 \end{cases} \right\}$.

Zadanie 9. * Znajdując minimum funkcji

$$f(a,b,c) = \sum_{i=1}^{6} (x_i^2 + y_i^2 - 2ax_i - 2by_i - c)^2$$

dopasuj okrąg do następujacych danych $(0,8)$, $(2,7)$, $(-5,-9)$, $(4,5)$, $(-7,4)$, $(7,2)$ (oznaczmy je (x_i, y_i), $i = 1,2,3,4,5,6$). Uwaga, jest to tzw. dopasowanie Kåsy (Kåsa fit), chętnych do pogłębienia wiedzy odsyłamy do opracowania `https://arxiv.org/pdf/0907.0421.pdf` i dalej do strony `http://people.cas.uab.edu/~mosya/cl/`.