Matematyka II 2016/2017

Zadania domowe, seria 8 (szeregi potęgowe)

1. Znaleźć promień i przedział zbieżności szeregów potęgowych:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^n}$,

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$,

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$,

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg}\frac{1}{n}$,

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$,

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$,

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} x^n$,

(j) $\sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{arctg} n)^n x^n$,

(k) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} x^n$,

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(\ln n)^n}$,

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n(3n)!} x^n$,

(n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^2}{(n^2+3)4^n} x^n$,

(o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n x^n$,

(p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1} x^{n+1}$,

(q) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} (x-4)^{2n-1}$,

(r) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 2n} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n$.

2. Znaleźć sumę szeregu:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n}$,

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \left(\frac{x}{2}\right)^n$,

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} (an+b)\, x^n$,

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$,

(e) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)(2x)^{2n}$,

(f) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3!}\,(n+1)(n+2)(n+3)\,x^n$,

(g) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{3n+1}$,

(h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-3}}{4n-3}$,

(i) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$.

3. Dane są szeregi:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n e^{-2nx}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty}(\ln(x+1))^{n+1}$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(1+x)^{2n}}$.

   Wyznaczyć zbiór tych wartości x, dla których dany szereg jest zbieżny a następnie obliczyć jego sumę.

4. Znajdź rozwiązania analityczne równania $y''(x) = x^2y(x)$. Jaki jest promień zbieżności otrzymanych rozwiązań?

5. Sprawdź, czy funkcje $f_1(x)$ i $f_2(x)$ zdefiniowane w odpowiednim kole zbieżności szeregami

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty}x^n\,, \qquad f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{x^n}{n!}\,,$$

   spełniają równanie różniczkowe

$$(x-2)(x-1)f''(x) + (x^2-4x+5)f'(x) + (3-x)f(x) = 0\,.$$

6. Jak wyżej:

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{x^{2n+1}}{2^n\,n!}\,,$$

   a równanie różniczkowe ma postać

$$\psi''(x) + (3-x^2)\psi(x) = 0\,.$$

7. Mnożac bezpośrednio szeregi definiujące funkcje $sin\alpha$ i $\cos\alpha$ pokazać, że

$$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha\,.$$

8. Rozwinąć w szereg potęgowy wokół $x = 0$ do czwartego nietrywialnego wyrazu funkcje:

$$\begin{array}{ll}
a) & f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{1-x}\right), \\
b) & f(x) = \sin\left(1 - \dfrac{1}{1-x}\right), \\
c) & f(x) = \dfrac{1}{2 - \sin x}, \\
d) & f(x) = \exp(\sin x), \\
e) & f(x) = \ln(\cos^2 x), \\
f) & f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{1+x}\right)^{-1}, \\
g) & f(x) = \sin^2\left(1 + \dfrac{1}{1-x}\right), \\
h) & f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x + x^2}}.
\end{array}$$

Podać odpowiednie przedziały zmiennej x, w których szeregi te są zbieżne.