Seria 7 zadań z Matematyki II (2016/17) Szeregi

Zadanie 1 (suma resorująca, szereg geometryczny).

Dla podanych szeregów $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ wyznaczyć ich sumy cząstkowe $S_N \equiv \sum_{n=n_0}^{N} a_n$. Jeśli szereg jest zbieżny, obliczyć jego sumę.

a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}\,,$$

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)}, \qquad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-\,,$$

c) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}\,,$$

d) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}\,,$$

e) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)(\alpha+n+2)} \qquad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-\,,$$

f) $$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right),$$

g) $$\sum_{n=0}^{\infty} q^n\,, \qquad q \in \mathbb{R}\,,$$

h) $$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n\,, \qquad q \in \mathbb{R}\,,$$

i) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{7^n}\,.$$

Zadanie 2 (warunek konieczny, kryteria porównawcze, kryteria Cauchy'ego i d'Alamberta, twierdzenie o zagęszczaniu).

Zbadać zbieżność następujących szeregów:

a) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3-n^2+n-1}{n^4-n^2+1}\,,$$

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\cos\frac{1}{n})\,,$$

c) $$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)\left(\sqrt{n^2-2n+2} - \sqrt{n^2-2n}\right)\,,$$

d) $$\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n^2-2n+2)^{1/3}-(n^2-2n))^{1/3}\right]\ ,$$

e) $$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\ln^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\ ,$$

f) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,\mathrm{tg}\!\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

g) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,E(\sqrt{n}\,)},\qquad (E(x)=\ \text{część całkowita } x),$$

h) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n-1}{2}}}\,,$$

i) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n+1}{n(n+1)^n}\,,$$

j) $$\sum_{n=34}^{\infty}\frac{1}{(3n-100)^s},\qquad s\in\mathbb{R}\,,$$

k) $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\ ,$$

l) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^s},\qquad s\in\mathbb{R}\,,$$

m) $$\sum_{n=10}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}\,,$$

n) $$\sum_{n=10}^{\infty}\frac{1}{[\ln(\ln n)]^{\ln n}}\,,$$

o) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3-n^2+n-1}{n^4-n^2+1}\,,$$

p) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2 2^n}{(2n)!}\,,$$

r) $$\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right]\ ,$$

s) $$\sum_{n=1}^{\infty}n^\alpha \mathrm{th}^2\frac{1}{n}\,,\quad \alpha\in\mathbb{R}\,,$$

t) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}\,,$$

$u)\qquad \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}\,,$

$w)\qquad \displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n\,\ln n(\ln(\ln n))^s}, \quad s \in \mathbb{R}\,,$

$x)\qquad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,(n)^{1/n}}\,.$

Zadanie 3 (warunek konieczny, kryterium Leibnitza.

Zbadać zbieżność szeregów

$a)\qquad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\,,$

$b)\qquad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(\ln n)}\,,$

$c)\qquad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{|n-a|^p}\,, \quad p \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}\,,$

$d)\qquad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+1}{7n+2}\right)^n\,,$

$e)\qquad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(2^{1/n}-1\right)\,,$

$f)\qquad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n\, q^{n+1}\,, \quad q \in \mathbb{R}\,,$

$g)\qquad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-1/n}\,,$

$h)\qquad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a+(-1)^n}{n}\,, \quad a \in \mathbb{R}\,,$

$i)\qquad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+(-1)^n}\,,$

$j)\qquad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+3}\,,$

$k)\qquad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}\,,$

$l)\qquad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n^2)}{\ln(\ln n)}\,.$