Zadania treningowe z Matematyki II, sem. let. 2016/2017.
Opracował: Maciej Karczmarczyk

Seria VI, 16.05.2017 r.

Zadanie 1. Zdiagonalizuj formę kwadratową $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$. Podaj jej sygnaturę i przykładową bazę diagonalizującą.

Odp. Sygnatura Q to $(++-)$.

Zadanie 2. Znajdź wartości własne macierzy $T \in M_{5\times 5}(\mathbb{C})$:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odp. Wartości własne, to 1, -1 (podwójna), $\frac{1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$.

Zadanie 3. Znajdź wartości własne i wektory własne macierzy

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$,

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

(c) $C = \frac{h}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}$.

Odp. (a):

$$\left\{ \lambda_1 = 1, V_1 = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \backslash \{\vec{0}\} \right\}, \left\{ \lambda_2 = 2, V_2 = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \backslash \{\vec{0}\} \right\},$$

(b):

$$\left\{ \lambda_1 = 3, V_3 = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \backslash \{\vec{0}\} \right\}, \left\{ \lambda_2 = -1, V_{-1} = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \backslash \{\vec{0}\} \right\},$$

(c):

$$\left\{ \lambda_1 = 0, V_0 = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \backslash \{\vec{0}\} \right\}, \left\{ \lambda_2 = -h, V_{-h} = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ \sqrt{2} \\ -\mathrm{i} \end{bmatrix} \right) \backslash \{\vec{0}\} \right\}, \left\{ \lambda_3 = h, V_h = \operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ -\sqrt{2} \\ -\mathrm{i} \end{bmatrix} \right) \backslash \{\vec{0}\} \right\}.$$

Zadanie 4. Znajdź wartości własne macierzy $R = \begin{bmatrix} a & \sqrt{2}b & 0 \\ \sqrt{2}b & a & \sqrt{2}b \\ 0 & \sqrt{2}b & a \end{bmatrix}$ dla $a \in \mathbb{R}\backslash\{\vec{0}\}$ i $b \in \mathbb{R}$.

Odp. Wartości własne macierzy R to a, $a \pm 2b$.

Zadanie 5. Niech $T = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -6 & 11 & -6 \\ -8 & 16 & -9 \end{bmatrix}$ oraz $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$. Sprawdź, że C jest odwracalna oraz $D = C^{-1}TC$ jest diagonalna. Jakie są wartości własne T oraz D? Oblicz T^{2017}.

Odp. $T^{2017} = T$.

Zadanie 6. Pokaż, że jeżeli $f, g \in End(\mathbb{C}^n)$ mają n wspólnych liniowo niezależnych wektorów własnych, to $f \circ g = g \circ f$.