Matematyka II, zadania domowe seria 4, rzut.

Zadanie 1 !

Dane są dwie podprzestrzenie wektorowej $\mathbb{R}^3$

$A = \left\{ \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \wedge \mu \in \mathbb{R} \right\}$, $B = \left\{ \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$. Znajdź

1. operator rzutu P wzdłuż podprzestrzeni A na podprzestrzeń B,
2. operator rzutu Q wzdłuż podprzestrzeni B na podprzestrzeń A,
3. operator $\mathbb{I} - P$, gdzie $\mathbb{I}$ oznacza operator tożsamościowy,
4. rzuty wektorów $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ wzdłuż podprzestrzeni A na podprzestrzeń B,
5. rzuty wektorów $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ wzdłuż podprzestrzeni B na podprzestrzeń A.

Zadanie 2

Zakładając, że w $\mathbb{R}^3$ zadano standardowy iloczyn skalarny $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} := x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ znajdź podprzestrzeń wektorową (oznaczmy ją $A^\perp$) prostopadłą do podprzestrzeni A z poprzedniego zadania (tzn. zbiór wszystkich wektorów które są prostopadłe do każdego wektora z przestrzeni A), znajdź podprzestrzeń wektorową $B^\perp$ prostopadłą do podprzestrzeni B. Znajdź rzut prostopadły (tzn. wzdłuż podprzestrzeni $A^\perp$) wektora $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ na podprzestrzeń A. Znajdź rzut prostopadły tegoż wektora na podprzestrzeń B. Znajdź operatory rzutu z A na $A^\perp$, z $A^\perp$ na A, B na $B^\perp$ i z $B^\perp$ na B. Czy operatory te spełniają warunek $P = P^T$?

Zadanie 3

Znajdź rzut wektora $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

1. wzdłuż przestrzeni $\left\{ \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \\ 0 \end{bmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \wedge \mu \in \mathbb{R} \right\}$, na podprzestrzeń $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$,
2. wzdłuż przestrzeni $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$, na podprzestrzeń $\left\{ \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \\ 0 \end{bmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \wedge \mu \in \mathbb{R} \right\}$,
3. wzdłuż przestrzeni $\left\{ \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \\ \mu \end{bmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \wedge \mu \in \mathbb{R} \right\}$, na podprzestrzeń $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda \\ 0 \end{bmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$,
4. wzdłuż przestrzeni $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda \\ 0 \end{bmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$, na podprzestrzeń $\left\{ \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \\ \mu \end{bmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \wedge \mu \in \mathbb{R} \right\}$.