Matematyka II, zadania domowe, seria 1

Zadanie 1. Zbiór wektorów $e = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ tworzy bazę. Czy zbiory $f = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ oraz $g = (\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3})$ zadane przez równości

$$\begin{cases} \vec{f_1} = \vec{e_1} + 2\vec{e_2} + \vec{e_3} \\ \vec{f_2} = 3\vec{e_1} + 5\vec{e_2} + 2\vec{e_3} \\ \vec{f_3} = 4\vec{e_1} + 6\vec{e_2} + 3\vec{e_3} \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{g_1} = \vec{e_1} + \vec{e_3} \\ \vec{g_2} = \vec{e_1} - \vec{e_2} + 3\vec{e_3} \\ \vec{g_3} = \vec{e_1} - \vec{e_2} + 4\vec{e_3} \end{cases}$$

także tworzą bazy? Jeśli tak, znaleźć macierze przejścia z bazy f do bazy g oraz z bazy g do bazy e. Znaleźć współrzędne wektora

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}_e$$

w bazach f i g.

Zadanie 2. Dla jakich wartości parametrów a, b i c wektory

$$\vec{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{e_3} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

tworzą bazę przestrzeni 3-wymiarowej? W przypadku gdy $e = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ jest bazą, wyrazić w bazie e wektory (zapisane w bazie standardowej)

$$\vec{v_1} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad \vec{v_2} = \begin{bmatrix} a \\ c \\ b \end{bmatrix}, \quad \vec{v_3} = \begin{bmatrix} c \\ a \\ b \end{bmatrix}, \quad \vec{v_4} = \begin{bmatrix} c \\ b \\ a \end{bmatrix}, \quad \vec{v_5} = \begin{bmatrix} b \\ c \\ a \end{bmatrix}, \quad \vec{v_6} = \begin{bmatrix} b \\ a \\ c \end{bmatrix}.$$

Zadanie 3. Opisz podprzestrzeń najmniejszego wymiaru, do którego należą poniższe wektory

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ -9 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 6 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 4. W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ określamy podprzestrzenie

$$U = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}, \qquad V = \left\{ a \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wykazać, że $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$, tzn. każdy wektor z przestrzeni $\mathbb{R}^4$ jest kombinacją liniową wektorów z przestrzeni U i V oraz przecięcie przestrzeni U i V zawiera tylko wektor zerowy.

Zadanie 5. Zdefiniować poniższe podprzestrzenie liniowe przy użyciu układów równań liniowych

$$V_1 = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}, \quad V_2 = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\},$$

$$V_3 = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}, \quad V_4 = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Zadanie 6. Opisać następujące podprzestrzenie wektorowe:

$$V_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \right\}, \quad V_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x = -2y \ \wedge \ y = z \right\}.$$

Jakie są wymiary tych podprzestrzeni?

Zadanie 7. Dla jakich wartości parametrów $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ istnieje macierz odwrotna do macierzy

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & b & 0 & \beta \\ 0 & 0 & c & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}.$$

Znaleźć macierz odwrotną.

Zadanie 8. Zapisać wektor $w(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ w bazie

$$e = (x^3 + x^2 + x + 1, x^2 + x + 1, x + 1, 1).$$

A.Szereszewski, W.Kamiński (zad.1)