Matematyka II, seria 6, odwzorowania liniowe.

Zadanie 1. Podaj przykład przekształcenia liniowego $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ spełniającego warunki:

$$\ker\varphi = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x_1 - x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 0 \right\}, \qquad \mathrm{im}\varphi = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Zadanie 2. Niech $\mathbb{R}_2[x]$ będzie przestrzenią wektorową wszystkich rzeczywistych funkcji wielomianowych nie posiadających stopnia większego niż 2, oraz niech F_s będzie odwzorowaniem liniowym określonym przez wzór

$$F_s : \mathbb{R}_2[x] \ni P \longmapsto 6x^2 \int_0^1 P(x)\,dx + s\frac{dP}{dx} \in \mathbb{R}_2[x]\,.$$

Dla jakich parametrów $s \in \mathbb{R}$ funkcja wielomianowa $x^2 + 2x + 1$ należy do obrazu F_s?

Zadanie 3. Wiadomo że dla pewnej macierzy $B \in M_3(\mathbb{R})$

$$B\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad B\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad B\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Oblicz wartości macierzy B na wektorach bazy kanonicznej.

Zadanie 4. Znaleźć $\ker(A)$ i $\mathrm{im}(A)$ dla odwzorowania $A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ zadanego w bazie standardowej przez macierz

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 5. Czy przekształcenie $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) := \begin{bmatrix} (x_1+2)^2 - x_1 - x_3 - 4 \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 \end{bmatrix},$$

jest przekształceniem liniowym? Jeśli tak, to napisać macierz tego przekształcenia w bazie kanonicznej.

Zadanie 6. Znaleźć wzór na przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ zadane następującymi warunkami

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \varphi\left(\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 7.* Dane są wektory w $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

oraz permutacja zadana wzorem $\sigma(i) = (3i \bmod 4) + 1$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

a) Znajdź w bazie standardowej macierz odwzorowania liniowego $B : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ przekształcającego v_i na i-ty wektor bazy standardowej.

b) Znajdź w bazie standardowej macierz odwzorowania liniowego $M : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 : v_i \mapsto v_{\sigma(i)}$.