

Seria 5 zadań domowych z Matematyki II

1. Dane są następujące wektory:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć:

- Wektor jednostkowy prostopadły do pierwszego z podanych wektorów i leżący w płaszczyźnie wyznaczonej przez podane wektory.
- Wszystkie wektory jednostkowe prostopadłe do obu podanych wektorów.

2. Dla jakich wartości parametrów α, β prosta $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} t + \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$ jest równoległa do płaszczyzny $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ \beta \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} s + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$

3. Dane są następujące wektory:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- Sprawdź, czy wektory te są liniowo niezależne.
- Sprawdź, czy wśród tych wektorów jest jakaś para wektorów ortogonalnych.
- Jeśli to jest możliwe, skonstruuj bazę ortonormalną posługując się danymi wektorami i metodą ortogonalizacji Grama-Schmidta.
- Znajdź długości danych wektorów.
- Policz objętość równoległościanu rozpiętego na podanych trzech wektorach.
- Policz pole równoległoboku rozpiętego na pierwszych dwóch z podanych trzech wektorów.

4. Znaleźć jakąś bazę ortonormalną w przestrzeni rozpiętej przez wektory

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

5. Dane są wektory:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć wektor jednostkowy \vec{a} , dla którego objętość równoległoscianu rozpiętego na \vec{a} i dwóch podanych wektorach jest największa.

Odpowiedzi:

Zad. 1:

$$a) \frac{\pm 1}{3\sqrt{17}} \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ -7 \end{bmatrix}, \quad b) \frac{\pm 1}{\sqrt{17}} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Zad. 2: $\alpha - \beta = 2$.

Zad. 3:

a) Tak, b) Nie,

c) Na przykład:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix},$$

d) $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{10}$, e) 8, f) $\sqrt{14}$,

Zad. 4: Na przykład:

$$\frac{1}{\sqrt{7}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{39}} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Zad. 5:

$$\frac{\pm 1}{\sqrt{11}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$